

## **5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (РЯДЫ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ)**

### **5.1 Программа курса «Ряды и обыкновенные дифференциальные уравнения»**

**Аннотация:** Изучаются числовые и степенные ряды, а также основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений с методами их решений.

**Учебная задача:** Выработать умение пользования данным математическим аппаратом при постановке и решении математических моделей физических и инженерных задач, а также развитие достаточно высокого уровня математического и логического мышления.

**Объем курса:** 32 часа

**Структура курса:** лекции — 16 часов, практические занятия — 16 часов.

#### **Содержание курса**

##### **Тема 1. Числовые и степенные ряды.**

Понятие числового ряда. Сходящийся ряд, его сумма. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Основные свойства сходящихся рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши-Маклорена. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница. Признаки сходимости Абеля и Дирихле. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда. Промежутки равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.

##### **Тема 2. Общие понятия, относящиеся к дифференциальным уравнениям.**

Основные понятия, относящиеся к дифференциальным уравнениям: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая, интеграл. Задача Коши, начальные данные. Общее и частное решения дифференциального уравнения. Общий и частный интегралы.

##### **Тема 3. Решение уравнений с разделяющимися переменными, линейных уравнений первого порядка, уравнений Лагранжа и Клеро.**

Простейшие типы уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения и приводящиеся к ним, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Уравнения первого порядка, не

разрешенные относительно производной. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. Простейшие типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

#### **Тема 4. Линейные уравнения высокого порядка.**

Линейные уравнения  $n$ -го порядка. Свойства решений однородного линейного уравнения, фундаментальная система решений. Свойства решений неоднородного линейного уравнения, метод вариации произвольных постоянных.

#### **Тема 5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.**

Построение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Построение общего решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

#### **Тема 6. Системы линейных уравнений первого порядка.**

Основные понятия, относящиеся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений: порядок системы, решение системы, нормальная форма системы. Задача Коши для нормальной системы, начальные данные. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Общее и частное решения нормальной системы. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений. Свойства решений нормальной системы линейных однородных уравнений. Свойства решений нормальной системы линейных неоднородных уравнений, метод вариации произвольных постоянных.

#### **Тема 7. Линейные системы с постоянными коэффициентами.**

Построение фундаментальной системы решений нормальной системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

### **ЛИТЕРАТУРА**

#### **Основная**

1. В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. Основы математического анализа, т. 2. М.: Наука, 2001.
2. Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ, т.1. М.: Высшая школа, 1981, 1988.
3. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 2003.
4. А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973, 1979, 1985.

#### **Дополнительная**

1. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980, 1985, 1989.
2. Г. Н. Бергман. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 2002, 2005.

## 5.2 Ряды с положительными членами.

### Понятие числового ряда. Основные понятия.

Рассматривается числовая последовательность  $\{a_n\}$  вещественных (или комплексных) чисел. Сумма первых  $k$  ее членов называется  $k$ -ой частичной суммой:  $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ .

**Определение.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности  $\{S_k\}$  частичных сумм, т.е.  $S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n$  - сумма числового ряда.

Член  $a_n$  последовательности  $\{a_n\}$  называют  $n$ -ым членом или общим членом числового ряда. Если предела последовательности  $\{S_k\}$  не существует или он бесконечный, то соответствующий числовой ряд называют расходящимся.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд с общим членом  $a_n = q^n$  (ряд геометрической прогрессии).

Решение. Воспользуемся формулой суммы  $k$  членов геометрической прогрессии:

$$S_k = \frac{a_1(1-q^k)}{1-q}. \text{ Если } |q| < 1, \text{ существует предел } S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^k)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

При  $q = 1$  для любого  $n$   $a_n = 1$  и  $S_k = k$  и соответствующий ряд расходится.

При  $q = -1$  последовательность  $S_k = \frac{1}{2}((-1)^k - 1)$  ограничена, но не имеет предела и ряд также расходится. Расходимость ряда при  $|q| > 1$  следует из неограниченности последовательности  $S_k = \frac{q(1-q^k)}{1-q}$  и, как следствие, отсутствие у нее предела.

Применяя к  $\{S_k\}$  критерий Коши для последовательности, получим Критерий Коши для ряда:

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится в том и только в том случае, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall m > N_\varepsilon \forall n > m \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$

Доказательство. Последовательность  $\{S_k\}$  сходится в том и только в том случае, если к ней применим критерий Коши:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall m > N_\varepsilon \forall n > m \Rightarrow |S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ .

**Теорема 1.** (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Доказательство. По критерию Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \varepsilon$ .

Существуют расходящиеся ряды, для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Пример 2. (гармонический ряд). Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

Решение. Действительно,  $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

для любого  $n$ , и критерий Коши для последовательности  $\{S_k\}$  не выполняется, т.е. ряд расходится.

Упражнения.

1. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$  также сходится при любом  $\lambda$ .

2. Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (2) сходящиеся, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  сходящийся.

### Ряды с положительными членами.

Если  $a_n > 0$  для любого  $n$ , то ряд (1) называют рядом с положительными членами.

**Теорема 2.** Для сходимости числового ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм  $\{S_k\}$  была ограниченной.

Доказательство. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) сходится, то последовательность  $\{S_k\}$  сходится,

и потому является ограниченной. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с положительными членами, то

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$  для любого  $n$ , т.е. последовательность  $\{S_k\}$  монотонно возрастает. Если  $\{S_k\}$  ограничена, то она, как известно, имеет предел и ряд (1) сходится.

Применение этого простого (необходимого и достаточного!) условия сходимости рядов с положительными членами затруднено тем, что нахождение частичных сумм  $S_k$  не всегда возможно.

Замечание. Если ряд  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  получен из ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  отбрасыванием первых  $N$  его членов, то

его сходимость (или расходимость) от этого не изменяется. Это обусловлено тем, что критерий Коши, примененный к этим рядам, не опирается на значения первых  $N$  его членов.

**Теорема 3.** (Признак сравнения 1 для рядов с положительными членами)

Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (2) с положительными членами удовлетворяют условию:

$a_n \leq b_n$  для всех  $n > N$ , то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Из сделанного замечания можно полагать, что неравенство  $a_n \leq b_n$  выполняется для любого  $n$ . Если  $S'_k$  и  $S''_k$  частичные суммы рядов (1) и (2), то  $S'_k \leq S''_k$  и из ограниченности частичных сумм ряда (2) следует ограниченность частичных сумм ряда (1) и на основании теоремы 2 сходимость ряда (1). Если ряд (1) расходится, то  $S'_k$  неограничены и  $S''_k$  неограниченны. Тогда на основании теоремы 2 ряд (2) расходится.

**Теорема 4.** (Признак сравнения 2 для рядов с положительными членами)

Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (2) с положительными членами удовлетворяют условию:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ , то при  $\lambda > 0$  сходимость и расходимость рядов (1) и (2) одновременная. Если

$\lambda = 0$ , то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Пусть  $\lambda > 0$ . Из определения предела для  $\varepsilon = \lambda/2 \exists N : \forall n > N \rightarrow a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n$  и  $b_n < \frac{2}{\lambda} a_n$ . Тогда на основании теоремы 3 из сходимости (1) следует сходимость (2) и наоборот. Из расходимости (1) следует расходимость (2) и наоборот. Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n < \varepsilon \cdot b_n$ . Из последнего неравенства утверждения теоремы 4 следуют из теоремы 3.

**Теорема 5.** (Признак Даламбера для рядов с положительными членами).

Если общий член ряда (1) удовлетворяет условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ , то при  $\lambda < 1$  ряд сходится, а

при  $\lambda > 1$  расходится. При  $\lambda = 1$  признак ответа не дает.

Доказательство. Пусть  $\lambda < 1$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  столь малым, что  $\mu = \lambda + \varepsilon < 1$ . Тогда

$\exists N = N_\varepsilon : \forall n > N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon \Rightarrow a_{n+1} < \mu \cdot a_n \Rightarrow a_{n+1} < \mu^2 a_{n-1} < \mu^3 a_{n-2} < \dots < \mu^{n-N} a_N = b_{n+1}$  Ряд

$\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  сходящийся (геометрическая прогрессия со знаменателем  $\mu < 1$ ) и поэтому на основании

признака сравнения сходится ряд (1). Пусть  $\lambda > 1$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  столь малым, что  $\mu = \lambda - \varepsilon > 1$ .

Тогда  $\exists N = N_\varepsilon : \forall n > N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda - \varepsilon \Rightarrow a_{n+1} > \mu \cdot a_n \Rightarrow a_{n+1} > \mu^2 a_{n-1} > \mu^3 a_{n-2} > \dots > \mu^{n-N} a_N = b_{n+1}$

Ряд  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  расходящийся (геометрическая прогрессия со знаменателем  $\mu > 1$ ) и поэтому на

основании признака сравнения расходится ряд (1).

**Теорема 6.** (Интегральный признак Коши)

Если  $y = f(x)$  монотонно убывающая на  $D = [1; \infty)$  функция,  $f(x) \geq 0$  и интеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с общим членом  $a_n = f(n)$  сходится. Если интеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx$  расходится, то и ряд расходится.

Доказательство. Из монотонности:  $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$  для всех  $x \in [n; n+1]$ .

Тогда  $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$ . Если интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall m > n \Rightarrow \int_{n-1}^m f(x) dx < \varepsilon \Rightarrow f(n) + f(n+1) + \dots + f(m) \leq \int_{n-1}^m f(x) dx < \varepsilon$$

и для ряда (1) выполняется критерий Коши и ряд сходится. Если интеграл расходится, то последо-

вательность  $I_k = \int_1^{k+1} f(x) dx$  неограниченна и частичные суммы

$$S_k = f(1) + f(2) + \dots + f(k) \geq \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{k+1} f(x) dx$$

также неограниченны. Последнее свидетельствует о расходимости ряда (1).

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  в зависимости от параметра  $p$ .

Решение. Если  $p \leq 0$ , то ряд расходится по невыполнению необходимого признака.

Пусть  $p > 0$ . Тогда функция  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  монотонно убывает на  $[1; \infty)$  и интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{1}{1-p} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^{p-1}} - 1 \right).$$

Если  $p > 1$ , то интеграл сходится и по интегральному признаку сходится ряд. Если  $0 < p < 1$ , то интеграл расходится и по интегральному признаку расходится ряд. При  $p = 1$  (гармонический ряд) расходимость ряда была доказана в примере 2.

**Теорема 7.** (Радикальный признак Коши)

Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ряд с положительными членами, для которого существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ . Тогда

при  $\lambda < 1$  ряд сходится, при  $\lambda > 1$  ряд расходится. При  $\lambda = 1$  признак ответа не дает.

Доказательство. Пусть  $\lambda < 1$ . Число  $\varepsilon > 0$  выберем настолько малым, что  $\lambda + \varepsilon < 1$ . Тогда  $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon \Rightarrow a_n < (\lambda + \varepsilon)^n = b_n$ . Поскольку  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится (геометрическая прогрессия со знаменателем  $\mu = \lambda + \varepsilon < 1$ ), по признаку сравнения 1 ряд (1) сходится. Пусть  $\lambda > 1$ . Число  $\varepsilon > 0$  выбираем настолько малым, что  $\lambda - \varepsilon > 1$ . Тогда  $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > \lambda - \varepsilon \Rightarrow a_n > (\lambda - \varepsilon)^n = b_n$ . Поскольку  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится (геометрическая прогрессия со знаменателем  $\mu = \lambda - \varepsilon > 1$ ), по признаку сравнения 1 ряд (1) расходится.

Замечание. Для обобщенного гармонического ряда (пример 3) для любого  $p > 0$  константа  $\lambda = 1$  в признаках Даламбера и радикальном Коши. Действительно, в признаке Даламбера

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p} = 1.$$

В признаке Коши  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{p \ln n}{n}} = e^0 = 1$ . Однако, при  $p > 1$  ряды сходятся, а при  $p < 1$  расходятся, поэтому пограничный случай  $\lambda = 1$  может содержать сходящиеся и расходящиеся ряды. Признаки Даламбера и радикальный Коши в этом случае ответа не дают.

### 5.3 Знакопеременные ряды.

#### Абсолютная и условная сходимости.

**Определение.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

(2), составленный из модулей членов ряда (1).

**Теорема 1.** Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N, \forall m > n \Rightarrow |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$ . Поскольку

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon, \text{ для ряда (1) выполняется критерий Коши и он}$$

сходится.

Любой из достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами может быть использован как достаточный признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда. Например, достаточный признак Даламбера абсолютной сходимости знакопеременного ряда. Если

для общего члена знакопеременного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) выполняется условие:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda < 1$ , то ряд (1) абсолютно сходится.

**Определение.** Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , составленный из модулей его членов, расходится.

Чтобы понять разницу между абсолютной и условной сходимостями числовых рядов докажем теорему, утверждающую, что члены абсолютно сходящегося ряда можно менять местами без потери сходимости и изменения суммы ряда. Условно сходящиеся ряды при изменении порядка слагаемых могут изменять свою сумму.

**Теорема 2.** (Дирихле, без доказательства).

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) сходится абсолютно и  $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$  любая перестановка множест-

ва натуральных чисел. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (3) с общим членом  $b_n = a_{m_n}$  также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Для условно сходящегося ряда справедлива теорема.

**Теорема 3.** (Риман, без доказательства)

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) сходится условно, то для любого числа  $\sigma \in (-\infty, \infty)$  существует перестановка членов ряда (1), при которой он сходится и имеет сумму  $\sigma$ .

**Преобразования Абеля, достаточные признаки условной сходимости.**

Рассмотрим преобразование конечной суммы  $\sum_{k=1}^m a_k b_k$ .

**Теорема 4.** (Преобразование Абеля)

Для любых чисел  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ . справедливо представление:

$$\sum_{k=1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k,$$

где  $a'_k = a_{k+1} - a_k$ ,  $B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ .

Доказательство. (индукцией по числу  $m$ )

При  $m=2$  формула справедлива:  $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_2 (b_1 + b_2) - (a_2 - a_1) b_1$ .

Предположим, что формула верна для  $m$  и докажем ее справедливость  $m+1$ :

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k = a_{m+1} b_{m+1} + \sum_{k=1}^m a_k b_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m -$$



$$-\sum_{k=1}^m a'_k B_k + (a_{m+1} - a_m) B_m = a_{m+1} B_{m+1} - \sum_{k=1}^m a'_k B_k.$$

**Теорема 5.** (Признак Абеля)

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится, если 1) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится 2) последовательность  $\{b_n\}$  монотонна и ограничена.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля для оценки отрезка ряда:

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| = \left| b_m (a_n + a_{n+1} + \dots + a_m) - \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) (a_n + a_{n+1} + \dots + a_k) \right| \quad (1)$$

Для любого  $\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, m > n \Rightarrow |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$  и  $|b_m - b_n| \leq B$ .

Здесь константа  $B$  ограничивает значения модулей членов последовательности  $\{b_n\}$ :  $|b_n| \leq B$  для всех  $n$ . Пусть последовательность  $\{b_n\}$  монотонно растет:

$b_{k+1} - b_k > 0$  (в противном случае  $-(b_{k+1} - b_k) > 0$ ). Тогда второе слагаемое оценивается

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) (a_n + a_{n+1} + \dots + a_k) \right| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) |a_n + a_{n+1} + \dots + a_k| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2B} \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) = \frac{\varepsilon}{2B} (b_m - b_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается проще:

$$|b_m (a_n + a_{n+1} + \dots + a_m)| \leq |b_m| \cdot |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| \leq B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $\left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  для всех  $n > N, m > n$  и для ряда выполняется критерий Коши,

что завершает доказательство теоремы.

**Теорема 6.** (Признак Дирихле)

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится, если выполняются следующие условия

1) частичные суммы  $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$  ограничены

2) последовательность  $\{b_n\}$  монотонно стремится к нулю.

Доказательство. Пусть для определенности  $b_n$  возрастает. Воспользуемся преобразованием Абеля. Тогда будем иметь  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, m > n \Rightarrow |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2A}, |b_m - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2A}$ , где  $A$  – константа, ограничивающая отрезки ряда  $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_k| \leq A, \forall n, k$ . Первое слагаемое в оценивается:

$$|b_m(a_n + a_{n+1} + \dots + a_m)| \leq |b_m| \cdot |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \cdot A = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Второе слагаемое с учетом знакопостоянства  $b_{k+1} - b_k > 0$  для всех  $k$  (монотонность  $\{b_n\}$ )

оценивается: 
$$\left| \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k)(a_n + a_{n+1} + \dots + a_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) |a_n + a_{n+1} + \dots + a_k| \leq$$

$$\leq A \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) = A(b_m - b_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Тогда } \left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для всех } n > N, m > n \text{ и для}$$

ряда выполняется критерий Коши, что завершает доказательство теоремы.

**Определение.** Ряд называется знакочередующимся, если любые два соседних члена имеют

противоположные знаки :  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,  $a_n > 0$ . Следующий признак устанавливает достаточные

условия сходимости знакочередующихся рядов.

**Теорема 7.** (Признак Лейбница)

Если последовательность  $\{a_n\}$  в знакочередующимся ряде  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,  $a_n > 0$ , монотонно стремится к нулю, то ряд сходится.

Доказательство. К знакочередующемуся ряду с монотонно убывающими  $\{a_n\}$  применим признак Дирихле, поскольку все частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  ограничены.

**Общая схема исследования числового ряда.**

1. Проверяют выполнение необходимого признака сходимости. Если он не выполнен, исследование закончено - ряд расходится.

2. Выясняют является ли данный ряд знакоопределенным. ( все члены положительные или отрицательные). Если да, то подбирают подходящий достаточный признак (сравнения с известным рядом, Даламбера, радикальный или интегральный Коши, Раабе и др.)

3. Если ряд знаконеопределен, то рассматривают ряд из модулей его членов и подбирают подходящий достаточный признак абсолютной сходимости. Если ряд из модулей сходится, то исследование заканчивается – ряд сходится абсолютно.

4. Если ряд из модулей расходится, то ряд исследуется на условную сходимость. Если он знакочередующийся, то применяют признак Лейбница, если произвольный, то признак Абеля или Дирихле.

Пример 1. (Ряд Лейбница) Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$  в зависимости от  $p > 0$ .

Решение. При  $p > 1$  ряд из модулей есть обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  и он сходится, т.е. исходный ряд сходится абсолютно. При  $p \in (0; 1]$  абсолютной сходимости нет, хотя ряд знакопередающийся и последовательность  $a_n = \frac{1}{n^p}$  стремится к нулю монотонно. Тогда ряд по признаку Лейбница сходится условно.

Пример 2. Пусть последовательность  $\{a_n\}$  стремится к нулю монотонно. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha n$ .

Решение. Ряд знаконеопределенный, проверим выполнение условий признака Дирихле.

$$\text{Частичные суммы } S_k = \sum_{n=1}^k \cos \alpha n = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^k e^{i\alpha n} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}(1 - e^{iak})}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{\sin\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

ряд сходится.

Лемма. Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (1) и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (2) с положительными членами удовлетворяют условию:  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$  для всех  $n \geq N$ , то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Если

$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_n}{b_{n+1}}$  для всех  $n \geq N$ , то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Доказательство. Если перемножить неравенства при  $n = N, N+1, \dots, N+m$ , то

$$\frac{a_N}{a_{N+m}} \geq \frac{b_N}{b_{N+m}} \Rightarrow a_{N+m} \leq \frac{a_N}{b_N} \cdot b_{N+m} \text{ или } b_{N+m} \leq \frac{b_N}{a_N} \cdot a_{N+m}.$$

Из последних двух неравенств и признака сравнения 1 следует утверждения леммы.

**Теорема 8.** (Признак сходимости Раабе)

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с положительными членами и  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$ , то при  $p > 1$  ряд сходится, а при  $p < 1$  расходится.

Доказательство. Условие теоремы перепишем в виде  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p + o(1) \Rightarrow$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Если  $b_n = \frac{1}{n^q}$ , то  $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)^q}{n^q} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Пусть  $p > 1$  и

выберем число  $q : 1 < q < p$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится и  $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$ , что по лемме

означает сходимость ряда (1). Пусть  $p < 1$ . Выберем число  $q : p < q < 1$ . Тогда ряд (2) расходится

$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$  для  $n > N$ . Тогда по лемме ряд (1) расходится.

## 5.4 Степенные ряды.

### Степенные ряды.

**Определение.** Степенным рядом называют функциональный ряд вида:  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$  (1), где

$c_n$  - его коэффициенты,  $a$  - центр ряда.

Структуру области сходимости степенного ряда подчеркивает следующая

#### Теорема 1.

Если степенной ряд (1) сходится в точке  $x = x_0$ , то он сходится абсолютно для всех  $x$  на интервале  $D = \{x : |x-a| < |x_0-a|\}$ .

Доказательство.  $|c_n (x-a)^n| = |c_n (x_0-a)^n| \cdot \frac{|x-a|^n}{|x_0-a|^n}$ . Поскольку ряд (1) в точке  $x = x_0$  сходится, его члены ограничены (даже стремятся к нулю):  $\exists M : |c_n (x_0-a)^n| \leq M$  для всех  $n$ . Для каж-

дого  $x \in D$  величина  $t = \frac{|x-a|}{|x_0-a|} < 1$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot t^n$  сходящийся (ряд геометрической прогрессии).

Тогда по признаку сравнения ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n|$  сходится.

Следующая теорема уточняет характер сходимости (1) на замкнутом множестве.

#### Теорема 2. (Абеля)

Если степенной ряд (1) сходится в точке  $x = x_0 > a$ , то он сходится равномерно для всех  $x$  на отрезке  $D = \{x : 0 \leq x-a \leq x_0-a\} = [a; x_0]$ .

Доказательство. Обозначим  $a_k = \frac{(x-a)^k}{(x_0-a)^k}$  и  $b_k = c_k (x_0-a)^k$ . Применим преобразование

Абеля к сумме  $\sum_{k=p}^{k=q} c_k (x-a)^k = \sum_{k=p}^q a_k b_k = a_q \sum_{k=p}^q b_k - \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k-1}) (b_p + b_{p+1} + \dots + b_k)$ . Из условия тео-

ремы последовательность  $a_n \geq 0$  для  $x \in D$  и  $a_k - a_{k-1} < 0$ . Из сходимости (1) в точке  $x = x_0$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $N : \forall p \geq N, q > p \Rightarrow |b_p + b_{p+1} + \dots + b_q| < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $k > p$ . Тогда  $\left| \sum_{k=p}^q c_k (x-a)^k \right| \leq a_q \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k=p}^q (a_{k-1} - a_k) = a_q \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (a_q - a_{p-1}) \leq a_q \cdot \varepsilon \leq \varepsilon$ , поскольку  $a_q \leq 1$  для всех  $x \in D$ . Равномерная сходимость ряда (1) на  $D$  следует тогда из критерия Коши равномерной сходимости.

Следствие. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $D = [a; x_0]$ , а при  $x \in [a; x_0)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \text{ Тогда если сходится ряд } \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n, \text{ то } f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_0 - a)^n.$$

**Определение.** Областью сходимости степенного ряда (1) называют множество  $D_{cx}$ , состоящее из тех точек  $x_0$ , в которых ряд (1) сходится. Множество  $D_{cx}$  не пусто, поскольку  $a \in D_{cx}$ .

**Определение.** Радиусом сходимости степенного ряда называют число  $R = \sup_{x_0 \in D_{cx}} |x_0 - a|$ . Значение  $R = \infty$  соответствует тому, что  $D_{cx} = (-\infty; +\infty)$ . Значение  $R = 0$  означает, что  $D_{cx} = \{a\}$  и ряд (1) сходится только в одной точке.

**Определение.** Интервал  $(a - R; a + R)$  называется интервалом сходимости степенного ряда.

Следующая теорема дает возможность для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

**Теорема 3.** (Коши-Адамара)

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ . Тогда ряд (1) сходится абсолютно на интервале  $(a - R; a + R)$  и расходится вне отрезка  $[a - R; a + R]$ .

Доказательство. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ , то  $R = 0$  и ряд сходится в одной точке  $x = a$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ , то  $R = \infty$  и ряд сходится на всей числовой оси. Если  $R \neq 0$ , то для  $|x - a| < R \Rightarrow$

$$|x - a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} < 1, \text{ что по радикальному признаку Коши означает}$$

сходимость ряда. Если  $|x - a| > R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n (x-a)^n|} > 1$ , то ряд расходится по тому же признаку.

При  $|x - a| = R$  признак ответа не дает: ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

Пример 1. Степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  имеет радиус сходимости  $R = 1$ , сходится на интервале

$(-1; 1)$ , в точке  $x = 1$  расходится, а при  $x = -1$  сходится (условно).

Пример 2. Степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  имеет радиус сходимости  $R = 1$ , сходится на отрезке  $[-1; 1]$

(абсолютно).

Другую формулу для вычисления радиуса сходимости дает

**Теорема 4.** (Даламбера)

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}$ . Тогда ряд (1) сходится абсолютно на интервале  $(a - R; a + R)$  и расходится вне отрезка  $[a - R; a + R]$ .

Доказательство. Если  $|x - a| < R \Rightarrow |x - a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(x - a)^{n+1}|}{|c_n(x - a)^n|} < 1$ , что обеспечивает

сходимость ряда по признаку Даламбера. При  $|x - a| > R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(x - a)^{n+1}|}{|c_n(x - a)^n|} > 1$  и ряд расходится

поскольку не выполняется необходимый признак сходимости.

**Теорема 5.**

Пусть степенной ряд (1) имеет радиус сходимости  $R > 0$ . Тогда для любого  $r : 0 < r < R$  ряд (1) сходится равномерно на отрезке  $[a - r; a + r]$ .

Доказательство. На данном отрезке функциональный ряд (1) мажорируется числовым:  $|c_n(x - a)^n| \leq |c_n r^n|$ . По определению числа  $R$ , для  $\varepsilon = R - r$  существует  $x_0 \in D_{cx}$ , для которого  $|x_0 - a| > R - \varepsilon = r$ . Тогда по теореме 1 ряд (1) сходится (абсолютно) для всех  $x : |x - a| < |x_0 - a|$ , в частности  $x = a + r$ , т.е. ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$  сходится абсолютно. По теореме о мажорирующем ряде ряд (1) сходится равномерно на отрезке  $[a - r; a + r]$ .

Отметим ряд свойств степенных рядов, основанных теоремах о равномерной сходимости.

Следствие 1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.

Действительно, члены степенного ряда – непрерывные функции, поэтому его сумма – непрерывная функция на любом отрезке  $[a - r; a + r]$  при  $\forall r : 0 < r < R$ , т.е. она непрерывна на интервале  $(a - R; a + R)$ . Заметим, что непрерывность суммы на отрезке  $[a - R; a + R]$  не гарантирована.

Пример 3. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  имеет радиус сходимости  $R = 1$  и сумму (геометрическая прогрессия)

равную  $S(x) = \frac{1}{1 - x}$ , не являющуюся непрерывной на отрезке  $[-1; 1]$ .

Следствие 2. Степенной ряд (1) можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, при этом ряд из производных также степенной имеет тот же радиус сходимости и сумму, равную производной суммы ряда(1) внутри интервала сходимости.

Действительно, пусть ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$  (2) имеет радиус сходимости  $R'$  и  $I_2 = (a-R'; a+R')$  его интервал сходимости, ряд (1) имеет радиус сходимости  $R$  и  $I_1 = (a-R; a+R)$ - его интервал сходимости. Пусть  $\tilde{x} \in I_2$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (\tilde{x}-a)^{n-1}$  абсолютно сходится (теорема 1) и справедливо неравенство:  $|c_n| \cdot |\tilde{x}-a|^n \leq n |c_n| \cdot |\tilde{x}-a|^{n-1}$ . По признаку сравнения это означает сходимость ряда (1) в точке  $x = \tilde{x}$ , т.е  $R' \leq R$ . Пусть  $\tilde{x} \in I_1$ . Последовательность  $c_n (\tilde{x}-a)^n \rightarrow 0$  (необходимый признак), поэтому она ограничена:  $\exists M > 0 : \forall n \Rightarrow |c_n (\tilde{x}-a)^{n-1}| \leq M$ .

Тогда для  $x : |x-a| < |\tilde{x}-a|$  справедливо неравенство:  $n |c_n (\tilde{x}-a)^{n-1}| \cdot \frac{|x-a|^{n-1}}{|\tilde{x}-a|^{n-1}} \leq nM \cdot \frac{|x-a|^{n-1}}{|\tilde{x}-a|^{n-1}}$ . К

ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} Mn \frac{|x-a|^{n-1}}{|\tilde{x}-a|^{n-1}}$  применим признак Даламбера, из которого следует, что он будет сходится

при  $|x-a| < |\tilde{x}-a|$ . Тогда по признаку сравнения ряд (2) сходится (абсолютно) в точке  $x$ , т.е.

$R' \geq R$ . Сравнивая два полученных неравенства, получим  $R' = R$ . На основании теоремы 5 ряд из производных (2) равномерно сходится на каждом отрезке  $[a-r; a+r]$  и по теореме о дифференцировании функциональных рядов его сумма равна производной суммы ряда (1) на этом отрезке.

Следствие 3. Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать на отрезке  $[a; x]$  и полученный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$  имеет тот же интервал сходимости.

Доказательство аналогично следствию о дифференцировании.

## 5.5 Ряды Тейлора.

### Ряды Тейлора.

Пусть степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$  (1) имеет сумму  $f(x)$  в интервале  $(a-R; a+R)$ . Тогда по теореме о дифференцировании степенного ряда функция  $f(x)$  имеет производные любого порядка во всех точках интервала  $(a-R; a+R)$ , причем

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (x-a)^{n-k} \text{ для всех } x \in (a-R; a+R).$$

Поставляя  $x = a$ , получим соотношения, связывающие коэффициенты ряда (1) со значениями производных функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ :

$$f^{(k)}(a) = c_k \cdot k(k-1) \cdot \dots \cdot 1 = c_k \cdot k! \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (2)$$

**Определение.** Рядом Тейлора функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x = a$  называют степенной ряд (1), коэффициенты которого определяются формулами (2). В частном случае, при  $a = 0$  ряд (1) с коэффициентами (2) называют рядом Маклорена.

Таким образом, степенной ряд (1) является рядом Тейлора своей суммой. Всегда ли ряд Тейлора функции  $f(x)$  имеет  $f(x)$  своей суммой? Ответ в общем случае отрицательный.

Пример 1. Функция  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  имеет производные в точке  $a = 0$  всех порядков,

причем  $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots$ .

Решение.  $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \left| t = \frac{1}{x} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0$  и значение производной

$f'(x)$  в точке  $x = 0$  доопределяется нулем. Аналогично, выражение производной порядка  $k$ :

$f^{(k)}(x) = P_{m_k} \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ , где  $P_{m_k}(t)$  - многочлен степени  $m_k$  переменной  $t = \frac{1}{x}$ . Тогда

$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = \left| t = \frac{1}{x} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^{t^2}} = 0$  и поэтому  $f^{(k)}(0) = 0$ .

Тогда все коэффициенты ряда Маклорена функции  $f(x)$  равны нулю и сумма ряда нулевая для  $x \neq 0$  и, следовательно, не равна  $f(x)$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  разложима в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = a$ , если ее ряд Тейлора сходится и имеет сумму  $f(x)$  для  $x \in (a - R; a + R)$  при некотором  $R > 0$ .

Заметим, что  $n$ -ая частичная сумма ряда Тейлора совпадает с многочленом Тейлора функции  $f(x)$  степени  $n$ :  $S_n(x) = T_n(f) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ .

**Определение.** Остатком ряда Тейлора называют функцию  $r_n(f) = f(x) - T_n(f)$ . Выражение остатка ряда в форме Лагранжа имеет вид:  $r_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  для  $c \in (a - R; a + R)$ , а в фор-

ме Коши:  $r_n(f) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ .

**Теорема 1.** (Необходимое и достаточное условие разложимости)

Функция  $f(x)$  разложима в ряд Тейлора на множестве  $(a - R; a + R)$  тогда и только, если



$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(f) = 0$  для всех  $x \in (a - R; a + R)$ .

Доказательство. Следует из определения сходимости ряда.

**Теорема 2.** (Достаточное условие разложимости)

Если функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема на  $(a - R; a + R)$  при  $R: 0 < R \leq +\infty$  и существует константа  $M > 0$  такая, что  $|f^{(n)}(x)| \leq M$  при всех  $x \in (a - R; a + R)$  и  $n$ , то функция  $f(x)$  разложима в ряд Тейлора на  $(a - R; a + R)$ .

Доказательство. Воспользуемся выражением остатка ряда в форме Лагранжа:

$$|r_n(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sup_{x \in (a-R; a+R)} |f^{(n+1)}(x)| \cdot |x-a|^{n+1} \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}. \text{ Последовательность } b_n = \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \text{ бесконечно}$$

малая, поэтому остаток ряда стремится к нулю.

**Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.**

1. Функция  $y = e^x$ .

Коэффициенты ряда Маклорена  $c_n = \frac{(e^x)^{(n)}|_{x=0}}{n!} = \frac{1}{n!}$ . На любом интервале  $(-h; h)$  производные  $(e^x)^{(n)} = e^x \leq e^h$  ограничены, поэтому функция  $y = e^x$  разложима в ряд  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + (3)$  на любом интервале  $(-h; h)$ , т.е. на всей числовой оси.

2. Функция  $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Ряд для функции  $e^{-x}$  получается из ряда (3) заменой  $x$  на  $-x$ :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} +$$

Сложением рядов получим,

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (4)$$

3. Функция  $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Поскольку  $shx = ch'x$ , дифференцируем ряд (4):

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (5)$$

4. Функция  $y = \cos x$ .

Производные  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \leq 1$  ограничены на  $(-\infty; \infty)$  и коэффициенты

$$c_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n!} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k + 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k \end{cases}. \text{ Тогда ряд для косинуса примет вид :}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (6)$$

5. Функция  $y = \sin x$ .

Поскольку  $\sin x = -\cos' x$ , ряд для синуса получается дифференцированием ряда (6) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \quad x \in (-\infty; \infty) \quad (7)$$

6. Функция  $y = \ln(1+x)$ .

Ряд геометрической прогрессии  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$  сходится при  $x \in (-1; 1)$ .

Заменяя  $x$  на  $-x$ , получим  $\frac{1}{1+x} = \ln'(1+x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$ . Интегрируем ряд на

отрезке  $[0; x]$ :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1; 1) \quad (8)$$

Поскольку функция  $y = \ln(1+x)$  непрерывна на  $(-1; 1]$  и ряд (8) сходится в точке  $x = 1$ , (ряд Лейбница) то на основании следствия сумма ряда в точке  $x = 1$  равна  $\ln 2$ , т.е.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Поэтому разложимость функции  $y = \ln(1+x)$  в ряд (8) происходит на множестве  $(-1; 1]$ .

7. Функция  $y = (1+x)^\alpha$ .

Рассмотрим степенной ряд  $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots$

Найдем его радиус сходимости:  $c_k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \Rightarrow R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} =$

$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-k|}{k+1} = 1$ , т.е. ряд сходится для  $x \in (-1; 1)$  и имеет там сумму  $S(x)$ . Заметим, что

$$S'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1} + \dots \text{ и}$$

$$(1+x) \cdot S'(x) = \alpha \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!} \right) x^k \right) =$$

$$= \alpha \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{(k-1)!} \left( 1 + \frac{\alpha-k}{k} \right) x^k \right) = \alpha \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \right) = \alpha S(x).$$

Тогда  $\frac{dS}{S} = \frac{\alpha dx}{1+x} \Rightarrow \ln CS = \ln(1+x)^\alpha \Rightarrow CS = (1+x)^\alpha$ . Заметим, что  $S(0) = 1 \Rightarrow C = 1$  и

$S(x) = (1+x)^\alpha$ , т.е.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots \text{ для } x \in (-1;1) \quad (9)$$

## 5.6 Дифференциальные уравнения. Введение

Дифференциальные уравнения (ДУ) - это соотношения между независимыми переменными, искомыми функциями от этих переменных и производными или дифференциалами искоемых функций.

ДУ разделяются на два класса:

а) обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

$$F(x, y(x), y'_x(x), y''_{x^2}(x), \dots, y^{(n)}_{x^n}(x)) = 0, \quad (1)$$

б) уравнения с частными производными (УЧП)

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_k, y'_{x_1}, y'_{x_2}, \dots, y'_{x_k}, y''_{x_1^2}, y''_{x_1 x_2}, \dots, y^{(n)}_{x_k^n}) = 0 \quad (2)$$

Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в уравнение (1) или (2).

Проинтегрировать ДУ (1) и (2) - это значит найти соответственно такие функции  $y(x)$  и  $y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , при подстановке которых в уравнения (1) и (2) они обращаются в соответствующих областях в тождества.

Приведем примеры физических задач, приводящих к решению ДУ.

Пример 1. Согласно закону, установленному И. Ньютоном, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Пусть тело нагрето до температуры  $T_0$ , а температуру окружающей среды будем считать постоянной и равной  $T_c < T_0$ . Обозначим через  $T(t)$  температуру тела в момент времени  $t$ , а через  $K > 0$  коэффициент пропорциональности, и заметим, что функция  $T(t)$  убывающая. Применяя закон Ньютона, получаем ОДУ первого порядка

$$T'_t(t) = -K(T(t) - T_c).$$

Полагая  $T(0) = T_0$ , после интегрирования получим закон охлаждения в виде:

$$T(t) = T_c + (T_0 - T_c) \cdot e^{-Kt}.$$

Пример 2. Материальная точка массы  $m$  свободно падает под действием силы тяжести  $F_T=mg$ . Обозначим через  $y(t)$  расстояние, пройденное точкой за время  $t$ , тогда согласно второму закону Ньютона получаем ОДУ 2-го порядка

$$my''(t) = mg.$$

Полагая  $y(0) = y_0, y'(0) = V_0$ , после интегрирования получим закон движения материальной точки

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0t + y_0.$$

Пример 3. Рассмотрим замкнутый электрический контур, содержащий сопротивление  $R$ , самоиндукцию  $L$  и электродвижущую силу  $E(t)$ . Если через  $J(t)$  обозначить силу тока в контуре в момент времени  $t$ , то согласно 2-му закону Кирхгофа (сумма падений напряжения вдоль всякого замкнутого контура электрической цепи равна нулю) получим ОДУ первого порядка

$$L \cdot J'(t) + R \cdot J(t) = E(t),$$

определяющее закон изменения тока в данном контуре. Если предположить, что  $E(t)$  постоянна и равна  $E_0$ , а  $J(0)=0$ , то закон изменения тока  $J(t)$  имеет следующий вид:

$$J(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Отсюда видно, что ток  $J(t)$  складывается из двух токов: тока  $\frac{E_0}{R}$ , соответствующего закону Ома и экстратока замыкания  $-\frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ , протекающего в обратном направлении и быстро затухающего с увеличением  $t$ .

В курсе дифференциальных уравнений рассматриваются также системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

$$\Phi_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n^{(n)}(x)) = 0, (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где  $y_i(x), (i = 1, 2, \dots, n)$  искомые функции независимого переменного  $x$ .

Порядком системы (3) называется сумма порядков старших производных функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ .

Проинтегрировать систему (3) - это значит найти такие функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , при подстановке которых в равенства (3) последние обращаются в тождества в соответствующей области изменения  $x$ .

## 5.7 ОДУ первого порядка

Полагая в (1) введения  $n=1$ , получим ОДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(x, y, y'_x) = 0. \quad (1)$$

Если (1) однозначно разрешимо относительно  $y'_x$  или  $x'_y$ , то уравнения

$$y'_x = f(x, y) \quad (2)$$

или

$$x'_y = \frac{1}{f(x, y)} \equiv g(x, y) \quad (3)$$

назовём ОДУ первого порядка, разрешенными относительно производных.

Учитывая, что  $y'_x = \frac{dy}{dx}$ , уравнения (2) и (3) можно записать в виде:

$$dy - f(x, y)dx = 0, \quad (4)$$

$$dx - g(x, y)dy = 0, \quad (5)$$

которые будем называть ОДУ первого порядка в дифференциалах.

Общий вид ОДУ первого порядка в дифференциалах будет

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (6)$$

где функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  определены в некоторой открытой односвязной области  $D \subset R^2_{x, y}$ , причем точки, в которых одновременно обращаются в нуль функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$ , называются особыми точками уравнения (6).

Рассмотрим уравнение

$$y'_x = f(x, y), \quad (2)$$

где функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в области  $G \subset R^2_{x, y}$ , причем областью в  $R^2_{x, y}$  будем считать связное открытое множество, то есть: а) две любые точки этого множества  $G$  могут быть соединены ломаной, целиком принадлежащей  $G$ ; б) любая точка  $M$  множества  $G$  содержится в  $G$  вместе с некоторой окрестностью точки  $M$ .

**Определение 1.** Решением ОДУ (2) на промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Пр}_x G$  называется функция  $y = y(x)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (\exists y'(x))$ ;
- 2)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (M(x, y(x)) \in G)$ ;
- 3)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (y'(x) \equiv f(x, y(x)))$ .

Через  $\langle a, b \rangle$  будем обозначать связное множество на числовой оси, которое представляет собой один из промежутков:  $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b], (-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty)$ .

### Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$y'_x = f(x) \quad (7)$$

имеет решениями на промежутке  $\langle a, b \rangle$  непрерывности функции  $f(x)$  все множество первообразных

$$y(x) = \int f(x)dx + C, \quad (8)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Из примера 1 следует, что ОДУ (2) может иметь бесчисленное множество решений, причем эта ситуация является общей. Для выделения конкретного решения необходимо задать дополнительные условия, выделяющие это решение из всего множества решений. Такими условиями являются начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, M_0(x_0, y_0) \in G. \quad (9)$$

Числа  $x_0, y_0$  называются начальными данными, а задача отыскания решения ОДУ (2), удовлетворяющего начальным условиям (9), называется задачей Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9).

Наряду с задачей Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9) рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt. \quad (10)$$

**Определение 2.** Функция  $y = y(x)$ , определенная на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , называется решением уравнения (10), если выполняются условия:

- 1)  $y = y(x)$  - непрерывна;
- 2)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (M(x, y(x)) \in G)$ ;
- 3)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): \left( y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \right)$

**Теорема 1.** Функция  $y = y(x)$  является решением задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения (10).

Доказательство. Пусть  $y = y(x)$  является решением задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9). Тогда  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  выполняется условие 3) определения 1, причем  $x_0 \in \langle a, b \rangle, y(x_0) = y_0$ . Условия 1) и 2) определения 2 вытекают из условий 1) и 2) определения 1. Интегрируя тождество 3) определения 1 в пределах от  $x_0$  до  $x \in \langle a, b \rangle$ , получаем условие 3) определения 2). Следовательно,  $y(x)$  является решением уравнения (10).

Пусть теперь  $y = y(x)$  является решением интегрального уравнения (10) на промежутке  $\langle a, b \rangle$ . В силу тождества в 3) определения 2 функция  $y(x)$  дифференцируема для  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  и  $y(x_0) = y_0$ . Это показывает, что для функции  $y(x)$  выполнены начальные условия (9) и условие 1) определения 1. Условие 2) определения 1 совпадает с условием 2) определения 2. Дифференцируя по  $x$  тождество в 3) определения 2, получим тождество в 3) определения 1. Отсюда следует, что функция  $y(x)$  является решением ОДУ (2) с начальными условиями (9). Теорема доказана.

**Определение 3.** Будем говорить, что решение задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9) существует, если существует такой интервал  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ , и существует такое решение  $y(x)$ , определенное на этом интервале и удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ .

**Теорема 2.** (Дж. Пеано). Если в уравнении (2) функция  $f(x, y)$  непрерывна в области  $G \subset R_{x,y}^2$ , то решение (хотя бы одно) задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9) существует.

**Определение 4.** График решения  $y = y(x)$  уравнения (2) в плоскости  $ХОУ$  называется интегральной кривой ОДУ (2).

Рассмотрим пространство  $R_{x,y}^2$  и сопоставим каждой точке  $M_0(x_0, y_0)$  из области  $G$  достаточно малый отрезок прямой с угловым коэффициентом  $tg \alpha = f(x_0, y_0)$ , проходящей через точку  $M_0$ . Получившееся семейство отрезков в области  $G$  назовем полем направлений, определяемым ОДУ (2). Из определения решения и интегральной кривой ОДУ (2) следует, что кривая  $y = y(x)$ , лежащая в области  $G$ , тогда и только тогда является интегральной кривой этого уравнения, когда она гладкая и касательная в каждой её точке совпадает с направлением поля в этой точке. Отсюда получаем приближенный метод построения интегральных кривых ОДУ (2) в области  $G$ . Для удобства этого построения находят множество точек в области  $G$  с одинаковым наклоном поля.

**Определение 5.** Изоклиной ОДУ (2) в области  $G$  называется кривая, во всех точках которой направление поля, определяемого ОДУ (2), одинаково.

Из этого определения следует, что множество изоклин ОДУ (2) задается уравнением  $f(x, y) = C$ , где  $C$  принимает допустимые вещественные значения. Построив сетку изоклин, мы можем приближенно построить интегральные кривые уравнения (2) в области  $G$ . Заметим еще, что изоклины  $f(x, y) = 0$  и  $f^{-1}(x, y) = 0$  называются соответственно изоклинами нуля и бесконечности, то есть в точках первой направление поля параллельно оси  $ОХ$ , а в точках второй параллельно оси  $ОУ$ .

**Пример 2.** Приближенно построить интегральную кривую уравнения  $y'_x = x^2 + y^2$ , проходящую через начало координат. Изоклинами этого уравнения будут окружности

$x^2 + y^2 = C, C \geq 0$ . Полагая  $C = 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}$ , получим окружности с направлением поля  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ .

Используя эту сетку изоклин строим приближенно интегральную кривую. Заметим, что решения данного уравнения в виде интегралов найти невозможно, поэтому метод изоклин наиболее целесообразен.

Как видно из формулировки теоремы Пеано, она решает локальную задачу существования решения ОДУ (2), проходящего через точку  $M_0 \in G$ . Что же будет за пределами интервала  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ? Для решения этого вопроса введем понятие продолжения решений ОДУ (2).

**Определение 6.** Будем говорить, что решение  $y = y(x)$  ОДУ (2), определенное на промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Прх}G$  продолжимо вправо (влево), если существует решение  $y = y_1(x)$  этого уравнения, определенное на промежутке  $\langle a, b_1 \rangle \subset \text{Прх}G, b_1 > b$  ( $\langle a_1, b \rangle \subset \text{Прх}G, a_1 < a$ ), сужение которого на  $\langle a, b \rangle$  совпадает с  $y(x)$ . Решение  $y = y_1(x)$  ОДУ (2) называется в этом случае продолжением решения  $y = y(x)$  вправо (влево).

**Теорема 3.** Если решение  $y = y(x)$  ОДУ (2) определено на промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Прх}G$ , то оно продолжимо вправо (влево).

Доказательство. Покажем продолжимость вправо. Поставим задачу Коши для ОДУ (2) с начальными данными  $x_0 = b, y_0 = y(b), (b, y(b)) \in G$ . По теореме Пеано существует такой интервал  $(b - \delta, b + \delta) \subset \text{Прх}G, \delta > 0$ , в котором существует решение  $y = y^*(x)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y^*(b) = y(b)$ . Положим

$$y_1(x) = \begin{cases} y(x), x \in \langle a, b \rangle \\ y^*(x), x \in [b, b + \delta) \end{cases}$$

Легко проверить, что  $y = y_1(x)$  является решением ОДУ (2) на промежутке  $\langle a, b + \delta \rangle, \delta > 0$ , а это означает, что решение  $y = y(x)$ , согласно определению 6, будет продолжимо вправо. Аналогично доказывается продолжимость влево. Теорема доказана.

**Определение 7.** Решение  $y = y(x)$  ОДУ (2) называется полным, если оно не является продолжимым ни вправо, ни влево.

Из определения 7 и теоремы 3 следует, что областью определения полного решения всегда является открытый интервал  $(\alpha, \beta) \subset \text{Прх}G$ , называемый максимальным интервалом существования решения ОДУ (2).

Обратимся опять к теореме Пеано и заметим, что она утверждает существование хотя бы одного, не обязательно единственного, решения задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (9). Отсюда следует необходимость введения понятий точки и области единственности ОДУ (2).



**Определение 8.** Точка  $M_0(x_0, y_0) \in G$  называется точкой единственности ОДУ (2), если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность  $S(M_0, \varepsilon) \subset G$  этой точки, что внутри  $S(M_0, \varepsilon)$  через точку  $M_0$  проходит одна и только одна интегральная кривая ОДУ (2).

Область  $D \subset G$ , сплошь состоящую из точек единственности ОДУ (2), назовем областью единственности уравнения (2). Отсюда следует, что два любых решения ОДУ (2) из области  $D$ , совпадающие в некоторой точке, совпадают всюду в области  $D$ .

**Определение 9.** Точка  $M_0(x_0, y_0)$  называется точкой неединственности ОДУ (2), если в любой окрестности этой точки через неё проходит более одной интегральной кривой ОДУ (2).

**Определение 10.** Решение  $y = y(x)$  ОДУ (2) называется частным, если каждая точка, соответствующая этому решению интегральной кривой, является точкой единственности ОДУ (2).

Вся совокупность частных решений ОДУ (2) в области  $D$  называется общим решением уравнения (2) в этой области.

**Определение 11.** Функция  $y = y(x, C)$ , где  $C$  - произвольная постоянная, называется общим решением ОДУ (2) в области единственности  $D$ , если:

1) для любой точки  $M_0(x_0, y_0) \in D$  уравнение  $y_0 = y(x_0, C)$  однозначно разрешимо относительно  $C$ , то есть  $C_0 = y^{-1}(x_0, y_0)$ ;

2) функция  $y = y(x, C_0)$  является решением задачи Коши для ОДУ (2) с начальными данными  $x_0, y_0$ .

В общем случае, интегрируя ОДУ (2) в области  $D \subset G$ , мы получим общее решение в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (11)$$

или

$$U(x, y) = C. \quad (12)$$

**Определение 12.** Общее решение ОДУ (2), записанное в форме (11) или (12), называется общим интегралом, а функция  $U(x, y)$  - интегралом ОДУ (2) в области  $D$ .

Основными свойствами интеграла  $U(x, y)$  ОДУ (2) являются:

1) интеграл  $U(x, y)$  сохраняет постоянное значение вдоль всякой интегральной кривой  $y = y(x)$  уравнения (2), расположенной в области  $D$ ;

2) для всех  $(x, y) \in D$  имеет место тождество

$$U'_x(x, y) + U'_y(x, y) \cdot f(x, y) \equiv 0. \quad (13)$$

Пример 3. Для уравнения  $y'_x = x + y$  функция  $U(x, y) = (x + y + 1) \cdot e^{-x}$  является интегралом, а функция  $y = C \cdot e^x - x - 1$ , где  $C$  - произвольная постоянная, общим решением в области  $D = R_{x,y}^2$ . Самим проверить выполнимость свойств 1) и 2) интеграла  $U(x, y)$  в данном случае.

**Теорема 4** (Коши-Пикара). Если функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $f'_y(x, y)$  в области  $D \subset G$ , то существует, и притом единственное, решение  $y = y(x)$  задачи Коши ОДУ (2) с начальными условиями  $y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in D$ , то есть существует единственная интегральная кривая  $y = y(x)$  уравнения (2), целиком принадлежащая области  $D$ , проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

**Определение 13.** Решение  $y = y(x)$  ОДУ (2) называется особым, если каждая точка, соответствующая этому решению интегральной кривой, является точкой неединственности ОДУ (2). Интегральная кривая, соответствующая особому решению называется особой интегральной кривой ОДУ (2).

Из определений области единственности и особого решения следует, что особые решения могут быть лишь границей области  $D$ . Из теоремы Коши-Пикара следует, что в каждой точке особой интегральной кривой нарушается хотя бы одно из условий этой теоремы.

Пример 4. Уравнение  $y'_x = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}$  имеет общее решение  $y = (x - C)^3$  в областях  $D_1 = \{(x, y) | x \in R, y > 0\}$  и  $D_2 = \{(x, y) | x \in R, y < 0\}$  плоскости  $R_{x,y}^2$ . При этом функция  $y \equiv 0$  также является решением данного уравнения, однако она не получается из общего решения ни при каком значении произвольной постоянной  $C$ . Так как в точках интегральной кривой  $y \equiv 0$  производная  $f'_y(x, y) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$  не существует, то  $y \equiv 0$  - особая интегральная кривая.

Рассмотрим однопараметрическое ( $C$  - параметр) семейство

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (14)$$

гладких кривых сплошь заполняющих область  $D \subset R_{x,y}^2$  и предположим, что функция  $\Phi$  дифференцируема по переменным  $x$  и  $y$  в этой области.

Поставим следующую задачу: составить ОДУ первого порядка в области  $D$ , для которого каждая кривая данного семейства будет интегральной кривой. Очевидно, что для решения поставленной задачи достаточно исключить параметр  $C$  из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C) \cdot y'_x = 0 \\ \Phi(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Пример 5. Пусть заданы семейства гладких кривых  $y - C \cdot e^x = 0$  и  $(y - C) \cdot x - C = 0$ , где  $C$  - параметр. Построим соответствующие ОДУ первого порядка, исключая параметр  $C$  из систем

$$\begin{cases} -C \cdot e^x + y'_x = 0 \\ y - C \cdot e^x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y - C + x \cdot y'_x = 0 \\ (y - C) \cdot x - C = 0 \end{cases}.$$

Получим соответственно ОДУ  $y'_x = y$  и  $(x^2 + x) \cdot y'_x + y = 0$ .

**Определение 14.** Если общие решения уравнений (2)-(6) удается найти в виде конечной комбинации операций интегрирования, то будем говорить, что решение найдено в квадратурах.

Заметим, что в некоторых случаях левая часть уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ , то есть

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (16)$$

Тогда общим интегралом ОДУ (6) будет соотношение

$$U(x, y) = C, \quad (12)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Если же при умножении обеих частей ОДУ (6) на некоторую функцию  $\mu(x, y) \neq 0$ , непрерывную в области  $G$  непрерывности функций  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$ , левая часть полученного уравнения

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (17)$$

обращается в полный дифференциал от некоторой функции  $V(x, y)$ , то соотношение

$$V(x, y) = C, \quad (18)$$

где  $C$  - произвольная постоянная, является общим интегралом ОДУ (6).

### Уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$A_1(x)B_1(y)dx + A_2(x)B_2(y)dy = 0, \quad (1)$$

где функции  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  - непрерывны в промежутке  $x \in \langle a, b \rangle$ , а функции  $B_1(y)$  и  $B_2(y)$  - непрерывны в промежутке  $y \in \langle c, d \rangle$ .

Рассмотрим область  $G = \{(x, y) | x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}$ . В этой области, кроме особых точек, в которых одновременно обращаются в нуль функции  $A_1(x)B_1(y)$  и  $A_2(x)B_2(y)$ , уравнение (1) имеет в общем случае два вида решений:

$$1) x = \alpha, \text{ если } \alpha \in \langle a, b \rangle \text{ и } A_2(\alpha) \equiv 0, \quad (2)$$

$$y = \beta, \text{ если } \beta \in \langle c, d \rangle \text{ и } B_1(\beta) = 0; \quad (3)$$

2) рассмотрим область  $D \subset G$ , в которой  $A_2(x) \cdot B_1(y) \neq 0$ . Уравнение (19) в области  $D$  эквивалентно уравнению

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx + \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy = 0, \quad (4)$$

левая часть которого является полным дифференциалом функции

$$U(x, y) = \int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx + \int \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy. \quad (5)$$

Тогда общим интегралом ОДУ (1) в области  $D$  будет соотношение

$$\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx + \int \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy = C, \quad (6)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Таким образом, все множество решений ОДУ (1) состоит из решений (2), (3) и (6). Заметим, что среди решений (2) и (3) могут быть особые, причем интегральная прямая  $x = \alpha, \alpha \in \langle a, b \rangle$ , будет особой интегральной прямой ОДУ (1), если  $A_2(\alpha) \equiv 0$  и один из интегралов

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx, \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx, \quad (7)$$

где  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, является сходящимся. Аналогично, интегральная прямая  $y = \beta, \beta \in \langle c, d \rangle$ , будет особой интегральной прямой ОДУ (1), если  $B_1(\beta) \equiv 0$  и один из интегралов

$$\int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy, \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy \quad (8)$$

является сходящимся.

Другой метод нахождения особых решений для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной, связан с нарушением условий теоремы Коши-Пикара в точках исследуемых решений.

Укажем ещё один способ распознавания особых решений для ОДУ (1). Если решения (2) и (3) не получаются из (6) ни при каких частных числовых значениях  $C$ , то они являются особыми решениями ОДУ (1).

Решение задачи Коши для ОДУ (1) с начальными данными  $x_0, y_0$  ( $x_0, y_0 \in D$ ) имеет вид:

$$\int_{x_0}^x \frac{A_1(x)}{A_2(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{B_2(y)}{B_1(y)} dy = 0. \quad (9)$$

Пример 6. Всё множество решений уравнения  $y'_x = y^2$  состоит из прямой  $y = 0$  и совокупности кривых  $y = \frac{1}{C-x}$ , где  $C$  - произвольная постоянная. При решении вопроса будет ли интегральная прямая  $y = 0$  особой интегральной прямой обратимся к теореме Коши-Пикара. Так как функция  $f(x, y) \equiv y^2$  и её производная  $f'_y(x, y) \equiv 2y$  непрерывны в области  $R^2_{x,y}$ , то прямая  $y = 0$  не является особой интегральной прямой.

Пример 7. Для уравнения  $y'_x = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{y}$ , в отличие от предыдущего примера, прямая  $y = 0$  будет особой интегральной прямой. Почему?

Самостоятельно найти все решения уравнений:  $\sqrt{x} \cdot dy - dx = 0$ ,

$y'_x = 1 + y^2$ ,  $y'_x = \sqrt{y(1-y)}$ ,  $y'_x = \cos^2 y$ ,  $y'_x = \sqrt{y} \cdot (1 - \sqrt{y})$  нарисовать эскизы интегральных кривых.

Уравнение

$$y'_x = f(ax + by + c) \quad (10)$$

линейной подстановкой  $z(x) = ax + by + c$  приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$z'_x = b \cdot f(z) + a \quad (11)$$

### Однородные ОДУ первого порядка

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется однородным, если функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  являются однородными функциями по переменным  $x$  и  $y$  одного и того же порядка  $k \geq 0$ , то есть  $M(tx, ty) = t^k M(x, y), N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ .

Подстановкой  $y = x \cdot z(x)$  уравнение (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$(M(1, z) + z \cdot N(1, z))dx + x \cdot N(1, z)dz = 0. \quad (2)$$

Функции  $y = \alpha_i \cdot x, (x \neq 0; i = 1, 2, \dots, k)$ , где  $\alpha_i$  корни уравнения

$$M(1, z) + z \cdot N(1, z) = 0, \quad (3)$$

являются решениями уравнения (1), причем среди них могут содержаться особые. Особыми могут быть полуоси оси  $Oy$ :  $x = 0 (y \neq 0)$ . Заметим, что точка  $(0, 0)$  является особой для ОДУ (1).

Уравнение

$$y'_x = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (4)$$

всегда приводится к однородному уравнению или к уравнению с разделяющимися переменными, причем:

а) если  $c_1 = c_2 = 0$ , то ОДУ (4) - однородное;

б) если  $c_1 \neq 0$  или  $c_2 \neq 0$  и  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , то после линейной подстановки  $z = a_1x + b_1y$  получим уравнение с разделяющимися переменными;

в) если  $c_1 \neq 0$  или  $c_2 \neq 0$  и  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , то система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение  $(x = \alpha, y = \beta)$ . Заменой  $x = u + \alpha, y = v + \beta$  ОДУ (4) приводится к однородному уравнению

$$v'_u = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Если уравнение (1) не является однородным, но после замены  $y = z^m$ , где  $m \neq 0$ , обращается в уравнение

$$M_1(x, z)dx + N_1(x, z)dz = 0,$$

где функции  $M_1(x, y)$  и  $N_1(x, y)$  - однородные, то ОДУ (1) называется в этом случае обобщенным однородным уравнением.

Пример. Уравнение  $2x^2 y'_x = y^3 + xy$  является обобщенным однородным уравнением, так как после замены  $y = z^m$  оно обращается в уравнение

$$2mx^2 z^{m-1} z'_x = z^{3m} + xz^m, \text{ которое при } m = \frac{1}{2} \text{ будет однородным уравнением.}$$

### Линейные ОДУ первого порядка

Общий вид линейного ОДУ первого порядка

$$a(x)y'_x + b(x)y = c(x), \quad (1)$$

где функции  $a(x), b(x), c(x)$  - непрерывны на интервале  $(a, b)$  и  $a(x) \neq 0$ .

Разделим обе части уравнения (1) на функцию  $a(x)$  и получим эквивалентное уравнение

$$y'_x + p(x)y = q(x), \quad (2)$$

где  $p(x), q(x)$  также непрерывны на  $(a, b)$ .

Умножая обе части ОДУ (33) на функцию  $e^{\int p(x)dx} \neq 0$ , получаем ОДУ

$$(y \cdot e^{\int p(x)dx})'_x = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}, \quad (3)$$

интегрируя которое получаем общий интеграл

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \quad (4)$$

и общее решение

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right), \quad (5)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Разрешая ОДУ (1) относительно производной и применяя теорему Коши-Пикара получаем, что уравнение (1) не имеет особых решений.

Пример 1. Линейное уравнение

$$y'_x + y \cdot \cos x = e^{-\sin x},$$

после умножения обеих частей на функцию  $e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x} \neq 0$ , преобразуется в уравнение

$$(y \cdot e^{\sin x})'_x = 1.$$

Отсюда получаем общее решение ОДУ

$$y = e^{-\sin x} (x + C),$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Некоторые ОДУ первого порядка становятся линейными, если  $x$  считать искомой функцией, а  $y$  - аргументом, то есть

$$A(y) \cdot x'_y + B(y) \cdot x = C(y), \quad (6)$$

где  $A(y), B(y), C(y)$  - непрерывные функции на интервале  $y \in (c, d)$ .

Пример 2. Уравнение  $(2e^y - x) \cdot y'_x = 1$ , не являющееся линейным, преобразуется в линейное  $x'_y + x = 2e^y$ , общее решение которого имеет вид:  $x = e^y + Ce^{-y}$ , где  $C$  - произвольная постоянная.

Уравнение вида:

$$f'_y(y) \cdot y'_x + f(y) \cdot p(x) = q(x), \quad (7)$$

где  $p(x), q(x)$  - непрерывны на интервале  $x \in (a, b)$ , а функция  $f(y)$  - непрерывно дифференцируема на интервале  $y \in (c, d)$ , заменой  $z(x) = f(y(x))$  приводится к линейному ОДУ

$$z'_x + p(x) \cdot z = q(x).$$

Одним из замечательных ОДУ вида (7) является уравнение Я.Бернулли

$$y'_x + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n, \quad (n \neq 0, n \neq 1), \quad (8)$$

где функции  $p(x), q(x)$  - непрерывны при  $x \in (a, b)$ . Умножая обе части этого уравнения на функцию  $(1-n)y^{-n}, (y \neq 0)$ , приходим к уравнению вида (6)

$$(1-n)y^{-n}y'_x + p(x)(1-n)y^{1-n} = (1-n)q(x). \quad (9)$$

Полагая в (9)  $z(x) = y^{1-n}(x)$ , получим линейное уравнение

$$z'_x + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной  $y$ , получим общее решение уравнения Я. Бернулли в виде

$$y = \left\{ e^{\int (n-1)p(x)dx} \left( C + \int (1-n)q(x)e^{\int (1-n)p(x)dx} dx \right) \right\}^{\frac{1}{1-n}}, \quad (10)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Заметим, что при  $n > 0$  функция  $y(x) \equiv 0$  также будет решением уравнения Я. Бернулли. Применяя к этому уравнению теорему Коши-Пикара, видим, что при  $n > 1$  решение  $y(x) \equiv 0$  не является особым, а при  $0 < n < 1$  оно особое.

Пример 3. Уравнение Я. Бернулли  $xy'_x + 2y = xy^2$  подстановкой  $z = y^{-1}$  преобразуется в линейное  $z'_x - \frac{2}{x}z = -1$ , общее решение которого имеет вид  $z = x + Cx^2$ . Отсюда и из подстановки получаем общее решение искомого уравнения  $y = \frac{1}{x + Cx^2}$ , где  $C$  - произвольная постоянная.

Уравнение Я. Риккати

$$y'_x + p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^2 = r(x), \quad (11)$$

где  $p(x), q(x), r(x)$  - непрерывные в интервале  $x \in (a, b)$  функции, в общем случае не решается в квадратурах. Однако, если известно хотя бы одно его частное решение  $y = y_1(x)$ , то заменой  $y = y_1(x) + z$  оно приводится к уравнению Я. Бернулли.

### ОДУ первого порядка в полных дифференциалах

**Определение 1.** ОДУ первого порядка

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

где функции  $M(x, y), N(x, y)$  - непрерывны в области  $G \subset R^2_{x,y}$ , а левая часть есть полный дифференциал некоторой дифференцируемой функции  $U(x, y)$ , назовем ОДУ в полных дифференциалах. Общий интеграл этого уравнения задается соотношением

$$U(x, y) = C.$$



Поставим следующие вопросы: 1. Каким образом по виду уравнения (1) можно определить, является ли оно уравнением в полных дифференциалах? 2. Как найти функцию  $U(x, y)$ ? Ответы на эти вопросы дает следующая

**Теорема 1.** Уравнение (6), где  $M(x, y), N(x, y), M'_y(x, y), N'_x(x, y)$  - непрерывны в области  $G_1 \subset G$ , тогда и только тогда будет ОДУ в полных дифференциалах, если для всех  $(x, y) \in G_1$  имеет место равенство

$$M'_y(x, y) = N'_x(x, y). \quad (2)$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть левая часть уравнения (1) является в области  $G_1 \subset G$  полным дифференциалом функции  $U(x, y)$ , то есть имеет место тождество

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy. \quad (3)$$

Из тождества (3), в силу произвольности  $dx$  и  $dy$ , получаем тождества

$$M(x, y) \equiv U'_x(x, y), \quad N(x, y) \equiv U'_y(x, y), \quad (4)$$

дифференцируя которые соответственно по  $y$  и по  $x$ , получим

$$M'_y(x, y) \equiv U''_{xy}(x, y), \quad N'_x(x, y) \equiv U''_{yx}(x, y). \quad (5)$$

В силу непрерывности функций  $M'_y(x, y), N'_x(x, y)$  в области  $G_1 \subset G$ , из теоремы о равенстве смешанных производных получаем равенство (2).

Докажем вторую часть теоремы. Пусть в области  $G_1 \subset G$  выполняется равенство (2). Требуется показать, что существует такая функция  $U(x, y)$ , полный дифференциал которой в области  $G_1$  тождественно равен левой части уравнения (1), то есть имеют место тождества (4). Всё множество функций, удовлетворяющих первому тождеству в (4), дается формулой

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y), \quad (5)$$

где  $C(y)$  - произвольная дифференцируемая функция от  $y$ . Покажем, что  $C(y)$  можно выбрать так, чтобы выполнялось и второе тождество в (4), т.е.

$$U'_y(x, y) \equiv N(x, y). \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим

$$C'_y(y) = N(x, y) - \left( \int M(x, y)dx \right)_y \quad (7)$$

Отсюда следует, что  $C(y)$  можно найти, если правая часть в (7) не зависит от переменной  $x$ , то есть

$$\left( N(x, y) - \left( \int M(x, y) dx \right)'_y \right)'_x \equiv 0. \quad (8)$$

Преобразуя левую часть в (8), получим

$$\begin{aligned} N'_x(x, y) - \left( \left( \int M(x, y) dx \right)'_y \right)'_x &= N'_x - \left( \left( \int M(x, y) dx \right)'_x \right)'_y = \\ &= N'_x(x, y) - M'_y(x, y) = (\text{по условию (2) теоремы (1)}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $U(x, y)$ , с точностью до произвольной постоянной, имеет вид

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left( N(x, y) - \left( \int M(x, y) dx \right)'_y \right) dy. \quad (9)$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства второй части теоремы 1 следует практический прием решения ОДУ в полных дифференциалах.

Пример 1. Уравнение  $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$  является ОДУ в полных дифференциалах, так как  $(x^2 - y)'_y \equiv (y^2 - x)'_x$  в области  $R_{x,y}$ . Здесь  $M(x, y) = x^2 - y, N(x, y) = y^2 - x$ . По формуле (52) находим функцию

$$U(x, y) = \int (x^2 - y) dx + \int \left( y^2 - x - \left( \int (x^2 - y) dx \right)'_y \right) dy = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} -$$

$$-xy - \int (-x) dy = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} + C_1, \text{ где } C_1 - \text{ произвольная постоянная. Таким образом, общий}$$

интеграл искомого уравнения будет  $\frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^3}{3} = C$ , где  $C$  - произвольная постоянная.

**Теорема 2.** Решение задачи Коши для ОДУ(6) в полных дифференциалах с начальными условиями  $y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in D \subset G$ , где область  $D$  является областью непрерывности функций  $M(x, y), N(x, y), M'_y(x, y), N'_x(x, y)$  и в которой  $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ , даётся одной из формул:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0, \quad (10)$$

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0, \quad (11)$$

причем это решение единственно.

Доказать самостоятельно, используя вторую часть доказательства теоремы 5.

Заметим, что в точках, где одновременно обращаются в нуль функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$ , и называемых особыми для ОДУ (6), не гарантируется единственность решения задачи Коши.

Пример 2. Единственным решением задачи Коши для уравнения  $(2xy - 1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$  с начальными данными  $(0, 0)$  является функция  $x = \frac{2y^3}{1 + \sqrt{1 - 4y^4}}$ . Показать самостоятельно.

Пример 3. Найти все интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$ , проходящие через точку  $(0, 0)$ .

### Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение (1)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

с непрерывными в области  $D \subset G$  функциями  $M(x, y), N(x, y), M'_y(x, y), N'_x(x, y)$ , не являющееся уравнением в полных дифференциалах.

**Определение 1.** Если при умножении обеих частей ОДУ (1) на функцию  $\mu(x, y)$ , непрерывную вместе со своими частными производными и отличную от нуля в области  $D$ , уравнение (1) обращается в ОДУ в полных дифференциалах, то есть для всех  $(x, y) \in D$  выполняется равенство

$$(\mu(x, y) \cdot M(x, y))'_y = (\mu(x, y) \cdot N(x, y))'_x$$

или

$$\mu(x, y) \cdot (M'_y(x, y) - N'_x(x, y)) = N(x, y) \cdot \mu'_x(x, y) - M(x, y) \cdot \mu'_y(x, y) \quad (2)$$

то функцию  $\mu(x, y)$  назовем интегрирующим множителем ОДУ (1), а уравнение (2) - уравнением для нахождения интегрирующего множителя.

Заметим, что решить уравнение (2) не легче, чем уравнение (1), поэтому рассмотрим случаи, когда интегрирующий множитель находится достаточно легко:

1) пусть  $\mu(x, y) \equiv \mu(x)$ , тогда уравнение (2) принимает вид

$$\mu(x) \cdot (M'_y(x, y) - N'_x(x, y)) = N(x, y) \cdot \mu'_x(x, y)$$

или

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{N(x, y)} \cdot dx \quad (3)$$

Если правая часть в (3) зависит только от  $x$ , то есть

$$\frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{N(x, y)} = a(x),$$

то из (3) интегрированием находим  $\mu(x)$  с точностью до постоянного множителя

$$\mu(x) = C \cdot e^{\int a(x) dx}, \quad (4)$$

где  $C$  - произвольная постоянная (обычно полагают  $C = 1$ ).

2) пусть  $\mu(x, y) \equiv \mu(y)$ , то из (2) получаем

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{-M(x, y)} \cdot dy \quad (5)$$

Если правая часть в (5) является функцией одного только  $y$ , то есть

$$\frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{-M(x, y)} = b(y),$$

то интегрируя (5) получаем

$$\mu(y) = C \cdot e^{\int b(y) dy}, \quad (6)$$

где  $C$  - произвольная постоянная (для удобства обычно считают  $C = 1$ )

3) пусть  $\mu(x, y) \equiv \mu(\omega(x, y))$ , где  $\omega(x, y)$  - известная функция, непрерывная вместе со своими частными производными в области  $D$ , тогда из (2) получаем

$$\frac{d\mu(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{N(x, y) \cdot \omega'_x - M(x, y) \cdot \omega'_y} \cdot d\omega. \quad (7)$$

Если правая часть в (7) есть функция  $r(\omega)$ , то

$$\mu(\omega(x, y)) = C \cdot e^{\int r(\omega) d\omega}, \quad (8)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

## 5.8 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной

**Определение 1.** Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y'_x) = 0, \quad (1)$$

где функция  $F(x, y, y'_x)$  - непрерывна в области  $V \subset R^3_{x, y, y'}$ , называется ОДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной.

**Определение 2.** Решением ОДУ (1) в явной форме называется функция  $y = y(x)$ , определенная на промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Пр}_x V$  и удовлетворяющая условиям:

$$1) (\forall x \in \langle a, b \rangle): (\exists y'_x(x));$$

$$2) (\forall x \in \langle a, b \rangle): ((x, y(x), y'_x(x)) \in V);$$

$$3) (\forall x \in \langle a, b \rangle): (F(x, y(x), y'_x(x)) \equiv 0).$$

**Определение 3.** Решением ОДУ (1) в неявной форме на промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Pr}_x V$  называется решение  $y = y(x)$  функционального уравнения

$$\Phi(x, y) = 0$$

и обращающее ОДУ (1) в тождество для всех  $x \in \langle a, b \rangle$ .

**Определение 4.** Решением ОДУ (1) в параметрической форме называется функция

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

определенная на промежутке  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  и удовлетворяющая условиям

$$1) (\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle): (\exists x'_t(t), y'_t(t), \quad x'_t(t) \neq 0);$$

$$2) (\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle): \left( (x(t), y(t), \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}) \in V \right);$$

$$3) (\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle): \left( F(x(t), y(t), \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}) \equiv 0 \right).$$

**Определение 5.** Задачей Коши для ОДУ (1) называется задача нахождения решения  $y = y(x)$  этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию

$$y(x_0) = y_0, M_0(x_0, y_0) \in \text{Pr}_{(x,y)} V \quad (2)$$

Зафиксируем точку  $M_0(x_0, y_0)$  и рассмотрим уравнение

$$F(x_0, y_0, y'_x) = 0 \quad (3)$$

относительно  $y'_x$ . Допустим, что уравнение (3) разрешимо, то есть

$$y'_x = f_k(x_0, y_0), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (4)$$

Таким образом, в точке  $M_0$  определено  $m$  различных направлений. Все эти направления определяют поле направлений в точке  $M_0$ .

**Определение 6.** Точка  $M_0(x_0, y_0) \in \text{Pr}_{(x,y)} V$  называется точкой единственности решения задачи Коши для ОДУ (1) с начальными условиями (2), если в каждом из направлений

$$tg \alpha_k = f_k(x_0, y_0), (k = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (5)$$

через точку  $M_0$  проходит не более одной интегральной кривой уравнения (1).

**Определение 7.** Точка  $M_0(x_0, y_0) \in \text{Pr}_{(x,y)} V$  называется точкой неединственности решения задачи Коши для ОДУ (1) с начальными условиями (2), если в одном из направлений (5) через эту точку проходит более одной интегральной кривой.

Пусть ОДУ (1) в некоторой окрестности  $S(M_0, \varepsilon) \subset \text{Pr}_{(x,y)} V$  точки  $M_0(x_0, y_0)$  может быть разрешено относительно  $y'_x$ , то есть распадается на  $m$  различных уравнений

$$y'_x = f_k(x, y), (k = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (6)$$

разрешенных относительно производной.

Предположим, что каждое из уравнений (6) имеет общее решение

$$y = y_k(x, C), (k = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (7)$$

или общий интеграл

$$\Phi_k(x, y) = C, (k = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (8)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

**Определение 8.** Совокупность общих решений (7) или общих интегралов (8) называется общим решением или общим интегралом ОДУ (1).

**Определение 9.** Решение ОДУ (1) называется частным, если каждая точка соответствующей интегральной кривой является точкой единственности решения задачи Коши для уравнения (1).

**Определение 10.** Решение ОДУ (1) называется особым, если каждая точка соответствующей интегральной кривой является точкой неединственности решения задачи Коши для уравнения (1).

Рассмотрим вопрос о существовании особых решений у ОДУ (1). Очевидно, что особые решения ОДУ (1) могут содержать лишь те точки, в которых нарушаются условия теоремы единственности. В частности, если  $F(x, y, y'_x)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то особые решения следует искать среди множества тех точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $p = y'_x$ . Если система (10) совместна, то исключая параметр  $p$ , получим некоторую кривую  $\varphi(x, y) = 0$ , называемую  $p$ -дискриминантной кривой ОДУ (1). Таким образом, если ОДУ (1) имеет особые решения, то они находятся среди множества  $p$ -дискриминантных кривых уравнения (1).

Укажем первый метод нахождения особых решений ОДУ (1):

- 1) найти все  $p$ -дискриминантные кривые ОДУ (1);
- 2) среди найденных кривых найти интегральные кривые ОДУ (1);
- 3) проверить нарушение единственности в точках найденных интегральных кривых и выделить среди них особые.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y - xy'_x + e^{y/x} = 0 \quad (11)$$

и составим систему уравнений (10) для определения  $p$ -дискриминантных кривых

$$\begin{cases} y - xp + e^p = 0 \\ -x + e^p = 0 \end{cases}$$

Исключая параметр  $p$ , получаем  $p$ -дискриминантную кривую

$$y = x \ln x - x. \quad (12)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (96) есть решение ОДУ (95). Общее решение уравнения (12) есть семейство прямых

$$y = Cx - e^C, \quad (13)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Значения углового коэффициента в точках кривых (12) и (13) соответственно равны  $y'_x = \ln x$  и  $y'_x = C$ . Приравняем эти значения и найдем  $x = e^C$ . Подставим это значение  $x = e^C$  в (12) и (13) и получим, что при этом значении интегральные кривые (12) и (13) соприкасаются. Таким образом, через каждую точку интегральной кривой (12) в том же направлении проходит другая интегральная кривая из множества интегральных прямых (13). Отсюда и из определения особой интегральной кривой получаем, что кривая (12) - особая.

Пример 2. Для уравнения

$$9x - 4(y'_x)^2 = 0 \quad (14)$$

прямая  $x = 0$  будет единственной  $p$ -дискриминантной кривой, которая не является интегральной кривой этого уравнения. Таким образом, ОДУ (14) не имеет особых решений.

Рассмотрим простейшие случаи интегрирования ОДУ (1).

Случай 1. ОДУ (1) имеет вид

$$F(y'_x) = 0. \quad (15)$$

Пусть уравнение (15) имеет конечное или счетное (случай континуума мы не рассматриваем) число действительных решений относительно  $y'_x$ , то есть

$$y'_x = K_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

где  $K_i, (i = 1, 2, 3, \dots)$  - постоянные числа. Находим общие решения уравнений (16) в виде

$$y = K_i x + C, \quad (17)$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Выражая из (17) постоянные  $K_i$  и подставляя в (15), получим общий интеграл ОДУ (15) в виде

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$$

Особых решений в этом случае нет.

Пример 3. Уравнение

$$\left(y'_x\right)^4 - 4\left(y'_x\right)^2 + 1 = 0$$

имеет общий интеграл

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 - 4\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Случай 2. ОДУ (1) имеет вид

$$F(x, y'_x) = 0. \quad (18)$$

В этом случае могут представиться три возможности:

а) уравнение (18) разрешимо относительно  $y'_x$ , то есть

$$y'_x = f_k(x), \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

Общий интеграл каждого уравнения (19) имеет вид

$$y = \int f_k(x) dx + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Особых решений нет.

б) уравнение (18) однозначно разрешимо относительно  $x$ , то есть

$$x = \varphi(y'_x), \quad (20)$$

где  $\varphi(y'_x)$  - непрерывно дифференцируемая функция по  $y'_x$ . Обозначим через  $y'_x = p$ , тогда уравнение (20) запишется в виде

$$x = \varphi(p). \quad (21)$$

Для выражения искомой функции  $y$  через  $p$  воспользуемся тождеством  $dy = y'_x dx = p \cdot dx$ , подставляя в которое (18), получим

$$dy = p \varphi'_p(p) dp \Rightarrow y = \int p \varphi'_p(p) dp + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Таким образом, получили общее решение ОДУ (20) в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p \varphi'_p(p) dp + C \end{cases}$$

где  $p$  - параметр, а  $C$  - произвольная постоянная. Особых решений нет.

в) уравнение (20) допускает параметрическое представление



$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y'_x = \psi(t) \end{cases}, \quad (t \in \langle \alpha, \beta \rangle) \quad (22)$$

такое, что  $(\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle): (F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0)$  и функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  - непрерывно дифференцируемы в промежутке  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

Тогда из (22) и тождества  $dy = y'_x dx$  получаем  $dy = \psi(t)\varphi'_t(t)dt$ . Таким образом, общее решение ОДУ (18) в этом случае представляется в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'_t(t)dt + C \end{cases}$$

где  $t$  - параметр, а  $C$  - произвольная постоянная.

Пример 4. Уравнение

$$(y'_x)^2 - x^2 = 0 \quad (23)$$

разрешимо относительно  $y'_x$ , а именно

$$y'_x = \pm x.$$

Тогда общее решение ОДУ (23) имеет вид

$$y = \pm \frac{x^2}{2} + C,$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Особых решений нет.

## 5.9 ОДУ высших порядков. Основные понятия и определения.

**Определение 1.** Уравнение

$$F(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}) = 0, \quad (1)$$

где функция  $F$  непрерывна в некоторой открытой односвязной области  $W \subset R^{n+2}_{(x, y, y', \dots, y^{(n)})}$ , называется ОДУ  $n$ -го ( $n \geq 2$ ) порядка, не разрешенным относительно старшей производной  $y^{(n)}_{x^n}$ .

**Определение 2.** Уравнение

$$y^{(n)}_{x^n} = f(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n-1)}_{x^{n-1}}), \quad (2)$$

где функция  $f$  непрерывна в некоторой открытой односвязной области  $V \subset R^{n+1}_{(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}$ , называется ОДУ  $n$ -го ( $n \geq 2$ ) порядка, разрешенным относительно старшей производной  $y^{(n)}_{x^n}$ .

**Определение 3.** Решением ОДУ (2), определенным на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , называется функция  $y = y(x)$ , удовлетворяющая на этом промежутке условиям:

- 1)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (y(x) \in C^n_{\langle a, b \rangle})$ ;
- 2)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): ((x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in V)$ ;
- 3)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (y^{(n)}_{x^n} \equiv f(x, y(x), y'_x(x), \dots, y^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x)))$ . (3)

Заметим, что решение ОДУ (2) может быть задано в неявной форме  $\Phi(x, y) = 0$  или в параметрической форме  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ .

**Определение 4.** График решения  $y = y(x)$  ОДУ (2) в плоскости  $R^2_{(x,y)}$  называется интегральной кривой уравнения (2).

**Определение 5.** Задачей Коши для ОДУ (2) называется задача нахождения решения  $y = y(x)$  этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'_x(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x_0) = y^{(n-1)}_0, \quad x_0 \in \langle a, b \rangle, \quad (4)$$

$$M_0^*(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in V.$$

В случае уравнения (2) второго порядка

$$y''_{x^2} = f(x, y, y'_x), \quad (5)$$

где функция  $f(x, y, y'_x)$  непрерывна в области  $E \subset R^3_{(x,y,y')}$ , начальные условия (4) имеют вид:

$$y(x_0) = y_0, y'_x(x_0) = y'_0, \quad x_0 \in \langle a, b \rangle, K_0^*(x_0, y_0, y'_0) \in E, \quad (6)$$

то есть при  $x = x_0 \in \langle a, b \rangle$  задаются значения искомой функции  $y = y(x)$  и её производной.

Геометрически задачу Коши для ОДУ (5) с начальными условиями (6) можно сформулировать так: на плоскости  $R^2_{(x,y)}$  найти интегральную кривую  $l$  уравнения (5), проходящую через заданную точку  $K_0(x_0, y_0) = \text{Пр}_{(x,y)} K_0^*$  в заданном направлении  $\text{tg} \alpha_0 = y'_0$ , причем точка  $K_0^*(x_0, y_0, y'_0) \in E$ .

**Определение 6.** Если в некоторой  $\mathcal{E}$ -окрестности  $S(M_0, \mathcal{E}) \subset R^2_{(x,y)}$  точки  $M_0(x_0, y_0) = \text{Пр}_{(x,y)} M_0^*(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$  существует только одна интегральная кривая  $L (y = y(x))$  уравнения (2), проходящая через точку  $M_0$ , причем

$y(x_0) = y_0, y'_x(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}_x(x_0) = y^{(n-1)}_0, \left(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0\right) \in V$ , то будем говорить, что задача Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (4) имеет единственное решение.

**Теорема 1** (Коши-Пикара). Пусть функция  $f$  в уравнении (2) непрерывна в области  $V^* \subset V$  вместе со своими частными производными  $f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ . Тогда ОДУ (2) имеет единственное решение  $y = y(x)$  задачи Коши с начальными условиями (4), определённое на некотором отрезке  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset \text{Пр}_x V^*$ , где  $\delta > 0$  достаточно мало.

**Определение 7.** Функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (7)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - произвольные вещественные постоянные, определённая в промежутке  $\langle a, b \rangle \subset \text{Пр}_x V^*$ , называется общим решением ОДУ (2) в этом промежутке, если выполняются условия:

- 1)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \in C^n_{\langle a, b \rangle})$ ;
- 2)  $(\forall (x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in V^*):$  (система функциональных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y'_0 = \varphi'_x(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_0 = \varphi^{(n-1)}_x(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то есть

$$\begin{cases} C_1^0 = \psi_1(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \\ C_2^0 = \psi_2(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ C_n^0 = \psi_n(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0). \end{cases}$$

3) функция  $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0), x \in \langle a, b \rangle$  является единственным решением задачи Коши для ОДУ (2) с начальными условиями (4).

**Определение 8.** Если общее решение (7) ОДУ (2) задано неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (8)$$

то равенство (8) называется общим интегралом уравнения (2).

**Определение 9.** Решение ОДУ (2), получаемое из (7) при конкретных числовых значениях  $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \dots, C_n = C_n^*$ , называется частным решением уравнения (2) в области  $D = \text{Пр}_{(x,y)} V^*$ .

**Определение 10.** Решение  $y = \varphi(x)$  ОДУ (2) называется особым, если через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходят другие интегральные кривые уравнения (2).

**Простейшие случаи понижения порядка ОДУ (1)-(2).**

**Случай 1.** Уравнение (2) имеет вид:

$$y_{x^n}^{(n)} = f(x), \tag{9}$$

где функция  $f(x)$  непрерывная на промежутке  $x \in \langle a, b \rangle$ . Последовательно интегрируя, получаем общее решение уравнения (9)

$$y(x) = \int \dots \int f(x) dx \dots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n, \tag{10}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - произвольные постоянные.

**Случай 2.** Уравнение (1) имеет вид:

$$F(x, y_{x^k}^{(k)}, y_{x^{k+1}}^{(k+1)}, \dots, y_{x^n}^{(n)}) = 0, (k \geq 1). \tag{11}$$

Подстановка  $z(x) = y_{x^k}^{(k)}$  приводит (11) к уравнению

$$F(x, z, z'_{x^2}, z''_{x^2}, \dots, z^{(n-k)}_{x^{n-k}}) = 0$$

$(n-k)$ -го порядка.

**Случай 3.** Уравнение (1) имеет вид:

$$F(y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y_{x^n}^{(n)}) = 0. \tag{12}$$

Подстановка  $z(y) = y'_x$  приводит (12) к уравнению

$$\Phi(y, z, z'_y, z''_{y^2}, \dots, z^{(n-1)}_{y^{n-1}}) = 0,$$

при этом производные  $y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \dots, y_{x^n}^{(n)}$  выражаются через  $z, z'_y, \dots, z_{y^{n-1}}^{(n-1)}$  по формулам

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z$$

$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = (y''_{x^2})'_y \cdot y'_x = z''_{y^2} \cdot z^2 + (z'_y)^2 \cdot z$$

.....

$$y_{x^n}^{(n)} = z_{y^{n-1}}^{(n-1)} \cdot z^{n-1} + \dots + (z'_y)^{n-1} \cdot z.$$

**Случай 4.** Уравнение (1) имеет вид:

$$Q'_x(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y_{x^{n-1}}^{(n-1)}) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) равносильно уравнению

$$Q(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n-1)}_{x^{n-1}}) = C_1 \quad (14)$$

( $n-1$ )-го порядка.

Соотношение (14) называется первым интегралом ОДУ (13).

**Случай 5.** Функция  $F$  в уравнении (1) однородная относительно  $y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$  порядка  $k \geq 0$ , то есть имеет место равенство

$$F(x, ty, ty'_x, ty''_{x^2}, \dots, ty^{(n)}_{x^n}) = t^k F(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}).$$

Подстановка  $y'_x = y \cdot z$ , где  $z = z(x)$  новая искомая функция, приводит (1) к уравнению

$$y^k \cdot \Phi(x, z, z'_x, z''_{x^2}, \dots, z^{(n-1)}_{x^{n-1}}) = 0$$

( $n-1$ )-го порядка. При этом производные  $y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$  выражаются через  $y, z, z'_x, \dots, z^{(n-1)}_{x^{n-1}}$

по формулам

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= (y'_x)'_x = (y \cdot z)'_x = y'_x z + y z'_x = y(z^2 + z'_x) \\ y'''_{x^3} &= (y''_{x^2})'_x = (y(z^2 + z'_x))'_x = y(z^3 + 3zz'_x + z''_{x^2}) \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)}_{x^n} &= y(z^n + \dots \dots \dots + z^{(n-1)}_{x^{n-1}}). \end{aligned}$$

**Случай 6.** Функция  $F$  в уравнении (1) является обобщенно однородной, то есть имеет место равенство

$$F(tx, t^m y, t^{m-1} y'_x, t^{m-2} y''_{x^2}, \dots, t^{m-n} y^{(n)}_{x^n}) = t^k F(x, y, y'_x, \dots, y^{(n)}_{x^n}).$$

Произведём в уравнении (1) замену независимой переменной  $x$  и искомой функции  $y(x)$  на новую независимую переменную  $t$  и новую искомую функцию  $z(t)$  по формулам

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{mt}, \end{cases} \quad (15)$$

при этом

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t e^{mt} + mze^{mt}}{e^t} = e^{(m-1)t} (z'_t + mz) \\ y''_{x^2} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(z''_{t^2} + mz'_t)e^{(m-1)t} + (m-1)(z'_t + mz)e^{(m-1)t}}{e^t} = \end{aligned} \quad (16)$$

$$= e^{(m-2)t} \left[ z_t'' + (2m-1)z_t' + m(m-1)z \right]$$

.....

Подставляя (15) и (16) в ОДУ (1), получим уравнение

$$\Phi(z, z_t', z_t'', \dots, z_t^{(n)}) = 0,$$

которое подстановкой  $u(z) = z_t'$  приводится к уравнению

$$\Phi^*(z, u(z), u_z', u_z'', \dots, u_{z^{n-1}}^{(n-1)}) = 0$$

$(n-1)$ -го порядка.

### 5.10 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка (ЛОДУ)

**Определение 11.** ЛОДУ  $n$ -го порядка называется уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x), \quad (17)$$

где функции  $a_i(x) (i=1,2,\dots,n)$  и  $F(x)$ - непрерывны в некотором промежутке  $\langle a, b \rangle$ , причем  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (a_0(x) \neq 0)$ .

Разделим обе части уравнения (17) на  $a_0(x)$  и обозначим  $p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}$

$(i=1,2,\dots,n), g(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$ . Получим ЛОДУ  $n$ -го порядка в канонической форме

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x). \quad (18)$$

**Определение 12.** Если  $g(x) \neq 0$ , то (18) называется линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением (ЛНОДУ)  $n$ -го порядка, а если  $g(x) \equiv 0$ , то уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (19)$$

называется линейным однородным обыкновенным дифференциальным уравнением (ЛООДУ)  $n$ -го порядка, соответствующим ЛНОДУ (18).

Замечание 1. ЛООДУ (19) на промежутке  $x \in \langle a, b \rangle$  всегда имеет решение  $y(x) \equiv 0$ , которое называется тривиальным решением.

Запишем ЛНОДУ (18) в разрешенном относительно  $y^{(n)}$  виде

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_n(x)y + g(x) \equiv f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (20)$$

Так как функция  $f$  в (20) непрерывна вместе со своими частными производными по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  в области  $V = \{x \in \langle a, b \rangle, y \in R, y' \in R, \dots, y^{(n-1)} \in R\}$ , то в окрестности  $S(\varepsilon, M_0^*) \subset V$  любой точки  $M_0^*(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in V$  выполняются все условия теоремы 1 существования и единственности решения  $y = y(x)$  задачи Коши для уравнения (20) с начальными условиями (4). Отсюда следует, что для любого значения  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  и для любых, наперед заданных, вещественных значений  $y_0 \in R, y_0' \in R, y_0'' \in R, \dots, y_0^{(n-1)} \in R$  существует единственное решение задачи Коши для уравнений (18) и (19) с начальными условиями (4). Таким образом, любое решение  $y = y(x)$  уравнений (18) и (19) является частным и поэтому особые решения отсутствуют.

**Замечание 2.** Единственным решением задачи Коши для ЛООДУ (19) с начальными условиями

$$x = x_0 \in \langle a, b \rangle, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (21)$$

является тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ .

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $n$ -го порядка

$$L_n[ ] = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x)[ ], \quad (22)$$

определённый на множестве функций из класса  $C_{\langle a, b \rangle}^n$ , то есть для любой функции  $y(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^n$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$

$$L_n[y(x)] \equiv \frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + p_2(x) \frac{d^{n-2} y(x)}{dx^{n-2}} + \dots + p_n(x) y(x).$$

При этом предполагается, что все функции  $p_i(x) (i=1, 2, \dots, n)$  - непрерывны для  $\forall x \in \langle a, b \rangle$ .

Перечислим свойства оператора  $L_n[ ]$ :

- 1)  $(\forall \alpha \in R) (\forall y(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^n) : (L_n[\alpha y(x)] = \alpha L_n[y(x)]);$
- 2)  $(\forall y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^n) : \left( L_n \left[ \sum_{i=1}^k y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^k L_n[y_i(x)] \right);$
- 3)  $(\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R) (\forall y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^n) : \left( L_n \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^k \alpha_i L_n[y_i(x)] \right).$

**Линейная зависимость и независимость функций.**

**Определение 13.** Система функций  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ , определённых на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , называется линейно зависимой на этом промежутке, если

$$\left( \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0 \right) (\forall x \in \langle a, b \rangle): \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) \equiv 0 \right) \quad (23)$$

Если же последнее тождество в (23) имеет место лишь в случае, когда все постоянные  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$  одновременно равны нулю, то система функций  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  называется линейно независимой на  $\langle a, b \rangle$ .

Пример 1. Система функций  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  является линейно независимой в любом интервале  $(a, b) \subset R$ . В самом деле, соотношение

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \dots + \alpha_n \cdot x^n = 0,$$

в котором не все  $\alpha_i \in R (i=0, 1, 2, \dots, n)$  равны нулю, не может выполняться тождественно, ибо оно определяет собой алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени с вещественными коэффициентами и поэтому не может иметь более чем  $n$  вещественных корней.

Пример 2. Система функций  $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ , где все  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$  вещественные и различные, является линейно независимой в любом интервале  $(a, b) \subset R$ . Действительно, предположим противное, то есть

$$\left( \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > 0 \right) (\forall x \in (a, b)): \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i x} \equiv 0 \right). \quad (24)$$

Пусть, для определенности,  $\alpha_n \neq 0$ . Разделим обе части тождества в (24) на  $e^{\lambda_1 x} \neq 0$  и про дифференцируем по  $x$ . Получим тождество

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} \equiv 0. \quad (25)$$

Разделим обе части тождества (25) на  $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq 0$  и про дифференцируем по  $x$ . Получим тождество

$$\sum_{i=3}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) (\lambda_i - \lambda_2) e^{(\lambda_i - \lambda_2)x} \equiv 0.$$

Рассуждая аналогично, приходим после  $(n-1)$ -го шага к тождеству

$$\alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) (\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} \equiv 0,$$

из которого, в силу различности всех  $\lambda_i$ , следует  $\alpha_n = 0$ , что противоречит предположению. Отсюда следует утверждение примера 2.

**Теорема 2.** Если некоторая непустая подсистема  $\{y_1(x), \dots, y_m(x)\}$  системы функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\} (n > m)$  линейно зависима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то и сама система линейно зависима на этом промежутке.



Доказать самостоятельно.

Следствие. Если одна из функций системы  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ , определённых на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , тождественно равна нулю на этом промежутке, то такая система функций линейно зависима на  $\langle a, b \rangle$ .

**Определение 14.** Определитель

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \equiv W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (26)$$

называется определителем Вронского для системы функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ , непрерывно дифференцируемых до  $(n-1)$ -го порядка включительно на промежутке  $\langle a, b \rangle$ .

**Теорема 3.** Если система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}, y_i(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^{n-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) линейно зависима на  $\langle a, b \rangle$ , то  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (W(x) = 0)$ .

Доказательство. По условию теоремы

$$\left( \exists \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^* \in R, \sum_{i=1}^n (\alpha_i^*)^2 > 0 \right) (\forall x \in \langle a, b \rangle): \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i(x) \equiv 0 \right) \quad (27)$$

Продифференцируем тождество в (27) по  $x$  до  $(n-1)$ -го порядка включительно. Получим систему тождеств

$$\begin{cases} \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + \dots + \alpha_n^* y_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1^* y_1'(x) + \alpha_2^* y_2'(x) + \dots + \alpha_n^* y_n'(x) \equiv 0 \\ \dots \\ \alpha_1^* y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2^* y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n^* y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0. \end{cases} \quad (28)$$

Система (28) является однородной алгебраической системой тождеств относительно  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$  с определителем  $\Delta = W(x)$ . Так как  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i^*)^2 > 0$ , то  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (W(x) = 0)$ . Теорема 3 доказана.

Следствие. Система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}, y_i(x) \in C_{\langle a, b \rangle}^{n-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) линейно независима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , если  $(\exists x_0 \in \langle a, b \rangle): (W(x_0) \neq 0)$ .

### 5.11 ЛООДУ $n$ -го порядка с непрерывными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (19)$$

где функции  $p_i(x) (i = \overline{1, n})$  - непрерывные в промежутке  $x \in \langle a, b \rangle$ .

Лемма 1. Если функции  $y_i(x) (i = \overline{1, m})$  являются решениями уравнения (19), то любая их линейная комбинация

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_m y_m(x), \quad (20)$$

где  $\alpha_i (i = \overline{1, m})$  - произвольные вещественные числа, также будет решением ЛООДУ (19).

Доказательство непосредственно следует из свойства 3 линейного дифференциального оператора  $n$ -го порядка.

**Теорема 4.** Если функции  $y_i(x) (i = \overline{1, n})$  являются решениями ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = 0)$ ;
- 2)  $(\exists x_0 \in \langle a, b \rangle): (W(x_0) = 0)$ ;
- 3) система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  линейно зависима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ .

Доказательство. Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что из 1) следует 2), из 2) следует 3), из 3) следует 1).

а) соотношение  $1) \Rightarrow 2)$  - очевидно;

б) покажем, что  $2) \Rightarrow 3)$ . Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$n$  уравнений с  $n$  неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ . Так как определитель этой системы

$\Delta \equiv W(x_0) = 0$ , то система (30) имеет хотя бы одно ненулевое решение  $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0), \sum_{i=1}^n (\alpha_i^0)^2 > 0$ .

Из леммы 1 и равенств (30) следует, что функция

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 y_i(x)$$

является решением ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$  и удовлетворяет при  $x = x_0 \in \langle a, b \rangle$  нулевым начальным условиям (21). Но единственным решением ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$  с начальными условиями (21), согласно замечанию 2 п.1, является тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ . Отсюда следует, что

$$(\forall x \in \langle a, b \rangle): \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 y_i(x) = 0 \right),$$

где  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i^0)^2 > 0$ , то есть система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  линейно зависима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ . в) соотношение 3)  $\Rightarrow$  1) вытекает из теоремы 3 п.2. Теорема 4 доказана.

Следствие. Если система решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ЛООДУ (19) линейно независима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (W(x) \neq 0)$ .

**Определение 15.** Любая система  $n$  решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ЛООДУ (19), линейно независимая на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , называется фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (19) на этом промежутке.

Пример 3. Уравнение  $y'' - y = 0$  имеет частные решения  $y_1(x) = e^x$  и  $y_2(x) = e^{-x}$  на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ . Так как система функций  $\{e^x, e^{-x}\}$  линейно независима (см. пример 2 п. 2) на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то она представляет собой ФСР данного уравнения на этом промежутке.

**Теорема 5.** Для того, чтобы система  $n$  решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$  являлась ФСР уравнения (19) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского  $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$  не равнялся нулю хотя бы в одной точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

Доказательство. Необходимость следует из определения 15 и следствия из теоремы 4. Достаточность следует из определения 15 и следствия из теоремы 3.

**Теорема 6.** ЛООДУ (19) с непрерывными на промежутке  $\langle a, b \rangle$  коэффициентами всегда имеет ФСР на этом промежутке.

Доказательство. Выберем произвольную числовую матрицу

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

с определителем  $\det A_{n \times n} \neq 0$  и поставим для ЛООДУ (19)  $n$  задач Коши с начальными условиями: при  $x = x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$1) \begin{cases} y(x_0) = a_{11} \\ y'(x_0) = a_{21} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n1} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y(x_0) = a_{12} \\ y'(x_0) = a_{22} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots \quad n) \begin{cases} y(x_0) = a_{1n} \\ y'(x_0) = a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{nn} \end{cases}$$

По теореме 1 каждая из поставленных задач имеет единственное решение на промежутке  $\langle a, b \rangle$ . Обозначим эти решения соответственно  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  и составим определитель Вронского для этих решений в точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ , который совпадает с  $\det A_{n \times n} \neq 0$ . Из теоремы 5 получаем, что найденная система решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  является ФСР ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$ . Теорема 6 доказана.

**Теорема 7.** Пусть система решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ЛООДУ (19) является ФСР этого уравнения на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , тогда общее решение ЛООДУ (19) на  $\langle a, b \rangle$  имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (31)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - произвольные постоянные.

Доказательство. Так как любое решение ЛООДУ (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$  является частным, то достаточно показать, что всякое решение  $y_0(x)$  задачи Коши для уравнения (19) с начальными условиями  $x = x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,

$$y_0(x_0) = y_0 \in R, y_0'(x_0) = y_0' \in R, \dots, y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \in R$$

задаётся формулой (31). Составим линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (32)$$

Поскольку определитель этой системы является определителем Вронского для функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , являющихся линейно независимыми на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то он отличен от нуля в любой точке этого промежутка. Следовательно, система (32) имеет единственное решение  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ . Тогда

$$(\forall x \in \langle a, b \rangle): (y_0(x) \equiv C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x)). \quad (33)$$

Действительно, слева и справа в тождестве (33) стоят решения ЛООДУ (19), начальные условия которых при  $x = x_0 \in \langle a, b \rangle$  совпадают. Согласно теореме 1 о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (19) с начальными условиями (32) левая и правая части в (33) совпадают на всём промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то есть имеет место (33). Теорема 7 доказана.

**Следствие.** ЛООДУ (19) не может содержать более чем  $n$  линейно независимых решений на промежутке  $\langle a, b \rangle$ .

**Теорема 8.** Если уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (19)$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = 0, \quad (34)$$

с непрерывными на промежутке  $\langle a, b \rangle$  коэффициентами  $p_i(x), q_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), имеют общую ФСР  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  на этом промежутке, тогда

$$(\forall i = \overline{1, n})(\forall x \in \langle a, b \rangle): (p_i(x) \equiv q_i(x)).$$

Доказательство. Подставляя решения  $y_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) из ФСР в уравнения (19) и (34) и вычитая почленно полученные тождества, получим

$$(p_1(x) - q_1(x))y_i^{(n-1)}(x) + \dots + (p_n(x) - q_n(x))y_i(x) \equiv 0. \quad (35)$$

Если предположить, что  $(\exists x_0 \in \langle a, b \rangle): (p_1(x_0) \neq q_1(x_0))$ , то, в силу непрерывности функций  $p_1(x), q_1(x)$ ,

$$(\exists (a_1, b_1) \subset \langle a, b \rangle, x_0 \in (a_1, b_1))(\forall x \in (a_1, b_1)): (p_1(x) \neq q_1(x)).$$

Разделим обе части тождества (35) на  $p_1(x) - q_1(x)$ , считая  $x \in (a_1, b_1)$ . Тогда для всех  $x \in (a_1, b_1)$  получим тождество

$$y_i^{(n-1)}(x) + \frac{p_2(x) - q_2(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y_i^{(n-2)}(x) + \dots + \frac{p_n(x) - q_n(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y_i(x) \equiv 0,$$

которое показывает, что ЛООДУ  $(n-1)$ -го порядка

$$y^{(n-1)} + \frac{p_2(x) - q_2(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y^{(n-2)} + \dots + \frac{p_n(x) - q_n(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y = 0$$

с непрерывными в интервале  $(a_1, b_1)$  коэффициентами имеет  $n$  линейно независимых на этом интервале решений  $y_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), что противоречит следствию из теоремы 7. Отсюда получаем, что  $(\forall x \in \langle a, b \rangle): (p_1(x) \equiv q_1(x))$ . Рассуждая аналогично, получим  $(\forall i = \overline{2, n})(\forall x \in \langle a, b \rangle): (p_i(x) \equiv q_i(x))$ . Теорема 8 доказана.

**Следствие.** Если на промежутке  $\langle a, b \rangle$  задана линейно независимая система  $n$  функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  из класса  $C_{\langle a, b \rangle}^n$ , то можно построить ЛООДУ  $n$ -го порядка вида (19) с непрерывными на некотором интервале  $(a_1, b_1) \subset \langle a, b \rangle$  коэффициентами, для которого данная система функций будет ФСР на интервале  $(a_1, b_1)$ . В самом деле, так как система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  линейно независима на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то, согласно следствия из теоремы 3 п.2,

$(\exists x_0 \in \langle a, b \rangle) : (W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \neq 0)$ . В силу непрерывности функции  $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$  на  $\langle a, b \rangle$ , получаем, что

$$(\exists (a_1, b_1) \in \langle a, b \rangle, x_0 \in (a_1, b_1)) (\forall x \in (a_1, b_1)) : (W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \neq 0).$$

Предположим, что ЛООДУ  $n$ -го порядка вида (19) с требуемыми условиями построено и  $y = y(x)$ - любое его решение на интервале  $(a_1, b_1)$ . Тогда согласно следствия из теоремы 7 и из теоремы 3 п.2 следует, что  $(\forall x \in (a_1, b_1)) : (W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y(x)] = 0)$ , то есть

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)] \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая этот определитель по элементам последнего столбца, получим уравнение

$$\begin{aligned} y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Коэффициент при  $y^{(n)}$  является определителем Вронского  $W[y_1, \dots, y_n]$ , отличным от нуля для всех значений  $x \in \langle a_1, b_1 \rangle$ . Обозначим определитель при  $y^{(n-1)}$  через  $K(x)$  и разделим обе части уравнения (36) на функцию  $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ . Получим ЛООДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на промежутке  $\langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$  коэффициентами, для которого система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  является ФСР на  $\langle a_1, b_1 \rangle$ .

Пример 4. Построим ЛООДУ 2-го порядка, для которого система функций  $\{1, x^2\}$  является ФСР на соответствующем промежутке  $\langle a_1, b_1 \rangle$ . Составим определитель Вронского

$$W[1, x^2] = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Таким образом, в интервалах  $x \in (-\infty, 0)$  и  $x \in (0, +\infty)$  определитель Вронского  $W[1, x^2] \neq 0$ . Составляя уравнение  $W[1, x^2, y(x)] = 0$  и производя деление обеих его частей на функцию  $W[1, x^2] = 2x \neq 0$ ,

получим ЛООДУ 2-го порядка  $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$  с непрерывными в интервалах  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  коэффициентами, для которого система функций  $\{1, x^2\}$  будет ФСР.

**Теорема 9.** (Лиувилля-Остроградского) Если система решений  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ЛООДУ  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (19)$$

является ФСР этого уравнения на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то для всех  $x \in \langle a, b \rangle$  имеют место равенства

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = Ce^{-\int p_1(x) dx}, \quad (37)$$

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}, \quad (38)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Доказательство. Так как система функций  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  является ФСР уравнения (19) на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , то из теоремы 8 и следствия из этой теоремы вытекает, что

$$p_1(x) = -\frac{K(x)}{W[y_1(x), \dots, y_n(x)]}, \text{ где}$$

$$K(x) = \begin{vmatrix} y_1(x)y_2(x)\dots\dots\dots y_n(x) \\ y_1'(x)y_2'(x)\dots\dots\dots y_n'(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}(x)y_2^{(n-2)}(x)\dots\dots\dots y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x)y_2^{(n)}(x)\dots\dots\dots y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \quad (39)$$

Последнее равенство в (39) следует из формулы дифференцирования функционального определителя. Отсюда получаем уравнение для определения  $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$

$$\frac{dW[y_1(x), \dots, y_n(x)]}{W[y_1(x), \dots, y_n(x)]} = -p_1(x)dx,$$

которое после интегрирования (неопределенного или от  $x_0$  до  $x$  из  $\langle a, b \rangle$ ) даёт формулы (37) и (38). Теорема 9 доказана.

Следствие. Теорема Лиувилля-Остроградского имеет непосредственное применение для нахождения общего решения ЛООДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (40)$$

с непрерывными на промежутке  $\langle a, b \rangle$  коэффициентами, если известно одно его частное решение  $y = y_1(x) \neq 0$  на  $\langle a, b \rangle$ . Пусть  $y = y(x)$  - любое другое решение уравнения (40) такое, что  $\frac{y(x)}{y_1(x)} \neq \text{const}$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$ . Тогда, согласно теореме 9, получаем

$$W[y_1(x), y(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_1 \cdot e^{-\int p_1(x) dx}$$

или

$$y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = C_1 \cdot e^{-\int p_1(x) dx}. \quad (41)$$

Разделим обе части равенства (41) на функцию  $y_1^2(x) \neq 0$ , получим

$$\frac{y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{y_1(x)} \right) = C_1 \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2(x)}.$$

Отсюда получаем общее решение ЛООДУ (40) в виде:

$$y = y_1(x) \left[ \int \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_2 \right], \quad (42)$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

Пример 5. Найдём общее решение уравнения

$$xy'' - xy' + y = 0, \quad (43)$$

если известно его частное решение  $y = x$ . Приведем уравнение (43) к канонической форме ЛООДУ 2-го порядка, разделив обе части (43) на функцию  $x \neq 0$  в интервалах  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ,

$$y'' - y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (44)$$

и применим формулу (42), где  $p_1(x) \equiv -1$ . Получим общее решение ЛООДУ (44) в интервалах  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

$$y = C_1 x \int \frac{e^x}{x^2} dx + C_2 x, \quad (45)$$

где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

## 5.12 ЛООДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

**1. Операторные многочлены и их свойства.** Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $L_n[\square]$   $n$ -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами  $a_i (i = \overline{1, n})$

$$L_n[\square] = \frac{d^n \square}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \square}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \square}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{d \square}{dx} + a_n \square, \quad (1)$$



определённый на классе функций  $y(x) \in C_{(-\infty, +\infty)}^n$ .

Обозначим

$$\frac{d}{dx} = D, \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \dots, \frac{d^n}{dx^n} = D^n$$

**Определение 1.** Выражение

$$M(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} \quad (2)$$

назовём операторным многочленом, определённым на множестве функций  $y(x) \in C_{(-\infty, +\infty)}^n$ , то есть для всех вещественных  $\mathcal{X}$  справедливо тождество

$$L_n[y(x)] \equiv M(D)y(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} y(x), (a_0 = 1).$$

Перечислим свойства операторного многочлена:

**Свойство 1.**

$$(\forall y_1(x) \in C_{\mathbf{R}}^n) (\forall y_2(x) \in C_{\mathbf{R}}^n) (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}):$$

$$: (M(D)(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) = \lambda_1 M(D)y_1(x) + \lambda_2 M(D)y_2(x)) \quad (3)$$

Равенство (3) следует из свойства 3) линейного дифференциального оператора  $n$ -го порядка.

**Определение 2.** Определим операции сложения и умножения операторных многочленов посредством следующих равенств:

$$(\forall y(x) \in C_{\mathbf{R}}^n): ([M_1(D) + M_2(D)]y(x) = M_1(D)y(x) + M_2(D)y(x)); \quad (4)$$

$$(\forall y(x) \in C_{\mathbf{R}}^n): ([M_1(D) \cdot M_2(D)]y(x) = M_1(D)[M_2(D)y(x)]). \quad (5)$$

**Свойство 2.** Операция сложения операторных многочленов, определяемая равенством (4), обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Это свойство следует из определения 1.

**Свойство 3.** Операция умножения операторных многочленов, определяемая равенством (5), обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Доказательство. Покажем коммутативность операции умножения:

$$\begin{aligned} [M_1(D) \cdot M_2(D)]y(x) &= \left[ \left( \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^m b_i D^{m-i} \right) \right] y(x) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} \right) \left[ \sum_{i=0}^m b_i D^{m-i} y(x) \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_k b_i D^{n+m-k-i} y(x) = \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{i=0}^m b_i D^{m-i} \right) \left[ \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} y(x) \right] = [M_2(D) \cdot M_1(D)]y(x).$$

Ассоциативность следует из равенств:

$$\begin{aligned} [(M_1(D) \cdot M_2(D)) \cdot M_3(D)]y(x) &= [M_1(D) \cdot M_2(D)][M_3(D)y(x)] = \\ M_1(D)[M_2(D) \cdot M_3(D)y(x)] &= [M_1(D) \cdot (M_2(D) \cdot M_3(D))]y(x). \end{aligned}$$

**Свойство 4.** Для операторных многочленов справедлив дистрибутивный закон:

$$[M_1(D) \cdot (M_2(D) + M_3(D))]y(x) = [M_1(D) \cdot M_2(D) + M_1(D) \cdot M_3(D)]y(x).$$

Доказательство.  $[M_1(D) \cdot (M_2(D) + M_3(D))]y(x) = M_1(D)[(M_2(D) +$   
 $+ M_3(D))y(x)] = M_1(D)[M_2(D)y(x) + M_3(D)y(x)] = M_1(D)[M_2(D)y(x)] +$   
 $+ M_1(D)[M_3(D)y(x)] = [M_1(D) \cdot M_2(D)]y(x) + [M_1(D) \cdot M_3(D)]y(x) =$   
 $= [M_1(D) \cdot M_2(D) + M_1(D) \cdot M_3(D)]y(x).$

Из свойств 1-4 следует, что действия над операторными многочленами подчиняются тем же законам, что и действия над обычными многочленами над полем комплексных чисел.

Составим обычный алгебраический многочлен переменной  $\lambda$

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad (6)$$

где все  $a_i (i = \overline{1, n})$  - действительные числа.

**Определение 3.** Многочлен (6) будем называть характеристическим многочленом ЛООДУ с постоянными коэффициентами

$$M(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y = 0. \quad (7)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  - корни многочлена (6) кратностей  $m_1, m_2, \dots, m_k$  соответственно. Тогда, согласно основной теоремы алгебры, имеем равенства

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n;$$

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \quad (8)$$

Так как действия над операторными многочленами подчиняются тем же правилам, что и действия над обычными многочленами, то имеет место равенство

$$M(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot (D - \lambda_2)^{m_2} \dots (D - \lambda_k)^{m_k}. \quad (9)$$

Используя формулу (9), запишем ЛООДУ (7) в виде

$$M(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdot (D - \lambda_2)^{m_2} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0. \quad (10)$$

**Лемма 3.** Для операторных многочленов справедливы равенства:

$$1) M(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} M(\lambda);$$

$$2) M(D^2) \cos \beta x = M(-\beta^2) \cos \beta x;$$

$$3) M(D^2) \sin \beta x = M(-\beta^2) \sin \beta x;$$

$$4) M(D)[e^{\lambda x} y(x)] = e^{\lambda x} M(D + \lambda) y(x) - \text{формула смещения.}$$

Доказательство.

$$1) M(D)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^n a_k e^{\lambda x} \lambda^{n-k} = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} = e^{\lambda x} M(\lambda);$$

$$2) M(D^2) \cos \beta x = \sum_{k=0}^n a_k D^{2(n-k)} \cos \beta x = \sum_{k=0}^n a_k D^2 \cdot D^2 \cdots D^2 \cos \beta x =$$

$$\sum_{k=0}^n a_k (-\beta^2)^{n-k} \cos \beta x = M(-\beta^2) \cos \beta x;$$

3) аналогично как и в 2);

$$4) M(D)[e^{\lambda x} y(x)] = \sum_{k=0}^n a_k D^{n-k} (e^{\lambda x} y(x)) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i (e^{\lambda x})^i \cdot$$

$$\cdot (y(x))^{(n-k-i)} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i e^{\lambda x} \lambda^i D^{n-k-i} y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n a_k (D + \lambda)^{n-k} y(x) = e^{\lambda x} M(D + \lambda) y(x).$$

Пример 1. Применить формулу смещения в случае, когда операторный многочлен имеет вид  $M(D) = (D - 1)^2$ , а число  $\lambda = 1$ .

$$(D - 1)^2 e^x y(x) = e^x D^2 y(x) = e^x y_{x^2}''(x).$$

**Вид общего решения ЛООДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами в случае, когда все корни характеристического уравнения простые.**

Пусть все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения

$$M(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (11)$$

попарно различны. Тогда функции

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x} \quad (12)$$

являются решениями ЛООДУ (7). В самом деле, подставляя функции  $y = e^{\lambda_k x}$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) в уравнение (7) и используя лемму 3, получим тождества  $M(\lambda_k) \equiv 0$ , что и требовалось доказать. Так как система функций (12) с попарно различными  $\lambda_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) линейно независима на интервале  $(-\infty, +\infty)$ , то она будет ФСР уравнения (7) и поэтому общее решение ЛООДУ (7) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x}, \quad (12)$$

где  $C_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) - произвольные постоянные.

Заметим, что формула (12) справедлива как в случае действительных, так и в случае комплексных корней характеристического уравнения (11). Так, если имеется только одна пара ком-

плесно сопряжённых корней, например,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ , то соответствующая система  $n$  линейно независимых на интервале  $(-\infty, +\infty)$  вещественных решений ЛООДУ (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{2}e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} \cos \beta x; \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2}e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} \sin \beta x; \\ \varphi_3(x) &= e^{\lambda_3 x}; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) &= e^{\lambda_n x}. \end{aligned} \tag{13}$$

Действительно, матрица перехода от системы (12) линейно независимых на интервале  $(-\infty, +\infty)$  решений ЛООДУ (7) к системе решений (13) является невырожденной и поэтому система решений (13) также линейно независима на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Таким образом, общее решение ЛООДУ (7) в действительной форме имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \tag{14}$$

где  $C_i, (i = \overline{1, n})$  - произвольные постоянные.

Аналогичная ситуация возникает и в случае наличия нескольких пар комплексно сопряженных корней.

**Вид общего решения ЛООДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами при наличии кратных корней у характеристического уравнения.**

Пусть характеристическое уравнение (11) имеет  $k$  различных корней  $\lambda_i, (i = \overline{1, k})$  кратностей  $m_i, (i = \overline{1, k})$  соответственно. Тогда операторный многочлен имеет вид (10). Так как множители  $(D - \lambda_i)^{m_i}, (i = \overline{1, k})$  в (10) обладают свойством коммутативности, то в случае выполнения тождества  $(D - \lambda_i)^{m_i} y(x) \equiv 0$ , будет иметь место тождество

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} (D - \lambda_i)^{m_i} y(x) \equiv 0, \text{ то есть все решения каждого из уравнений}$$

$$(D - \lambda_i)^{m_i} y = 0, (i = \overline{1, k}) \tag{15}$$

являются решениями ЛООДУ (7).

Аналогично, в силу коммутативности операторов  $(D - \lambda_i)$  в (15), имеем

$$(D - \lambda_i)^{m_i-1} (D - \lambda_i) y = 0,$$

то есть решения уравнений

$$(D - \lambda_i) y = 0, (i = \overline{1, k}) \tag{16}$$

являются решениями уравнений (15). Но каждое уравнение (16) имеет решение  $y(x) = e^{\lambda_i x}$ . Покажем, что функции  $y(x) = x^s e^{\lambda_i x}, (s = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1)$  являются решениями уравнений (15). В самом деле, подставим эти функции в (15) и получим тождества

$$(D - \lambda_i)^{m_i} (x^s e^{\lambda_i x}) = e^{\lambda_i x} D^{m_i} x^s \equiv 0.$$

Таким образом, каждому корню  $\lambda_i (i = \overline{1, k})$  кратности  $m_i$  соответствует  $m_i$  решений

$$y_1(x) = e^{\lambda_i x}, y_2(x) = x e^{\lambda_i x}, \dots, y_{m_i}(x) = x^{m_i-1} e^{\lambda_i x} \quad (17)$$

уравнения (7). Система  $n$  решений (7), где  $i = \overline{1, k}$ , линейно независима на интервале  $(-\infty, +\infty)$  по теореме 14 о квазиполиномах и поэтому будет ФСР ЛООДУ (7) на этом интервале. Отсюда получаем общее решение ЛООДУ (7) в случае наличия кратных корней у характеристического уравнения (11)

$$y(x) = \sum_{s=1}^k P_{m_s-1}(x) e^{\lambda_s x}, \quad (18)$$

где полиномы  $P_{m_s-1}(x)$  имеют произвольные коэффициенты.

Заметим, что если среди корней характеристического уравнения (11) есть кратные комплексные корни, то при необходимости получения фундаментальной системы действительных решений для ЛООДУ (7) поступают также, как и в случае простых комплексных корней, а именно: пусть числа  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$  - корни кратности  $m_1 = m_2 = m$ , тогда  $2m$  комплекснозначным линейно независимым на интервале  $(-\infty, +\infty)$  решениям  $y(x) = x^s e^{\lambda_j x}, (s = 0, 1, 2, \dots, m-1; j = 1, 2)$  соответствуют  $2m$  действительных линейно независимых решения  $x^s e^{\alpha x} \cos \beta x, x^s e^{\alpha x} \sin \beta x, (s = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ . Отсюда следует, что если характеристическое уравнение (11) имеет  $p$  пар комплексно сопряженных корней  $\lambda_i^{(1)} = \alpha_i + i\beta_i, \lambda_i^{(2)} = \alpha_i - i\beta_i$  кратностей  $m_i (i = \overline{1, p})$  и  $q$  действительных корней  $\lambda_s (s = \overline{1, q})$  кратностей  $m_{p+s}$ , то общее решение ЛООДУ (7) в действительной форме имеет вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^p e^{\alpha_i x} [P_{m_i-1}^{(1)}(x) \cos \beta_i x + P_{m_i-1}^{(2)}(x) \sin \beta_i x] + \sum_{s=1}^q e^{\lambda_s x} P_{m_{p+s}-1}^{(3)}(x), \quad (19)$$

где полиномы  $P_{m_i-1}^{(1)}(x), P_{m_i-1}^{(2)}(x), P_{m_{p+s}-1}^{(3)}(x) (i = \overline{1, p}; s = \overline{1, q})$  - имеют произвольные коэффициенты.

Пример 2. Найдём общее решение ЛООДУ

$$M(D)y \equiv D(D-2)^3(D^2+4)^2 y = 0.$$

Корнями соответствующего характеристического уравнения

$$M(\lambda) \equiv \lambda(\lambda-2)^3(\lambda^2+4)^2 = 0$$

будут числа  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$ , кратности которых соответственно равны  $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 2$ . Согласно формуле (19), общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x + C_4x^2)e^{2x} + (C_5 + C_6x)\cos 2x + (C_7 + C_8x)\sin 2x,$$

где  $C_i, (i = \overline{1,8})$  - произвольные постоянные.

### 5.13 ЛНОДУ $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

#### Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами $n$ -го порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x), \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_n, a_0 \neq 0$ .

**Теорема.** Общее решение неоднородного уравнения (1) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Отыскание общего решения соответствующего однородного уравнения осуществляется по правилам, изложенным в предыдущем разделе. Частное решение неоднородного уравнения для случая правых частей специального вида находится методом подбора, или иначе, методом неопределенных коэффициентов.

Общий вид правой части уравнения (1), при котором применим метод неопределенных коэффициентов, следующий:

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x]. \quad (2)$$

Здесь  $P_l(x)$  и  $Q_m(x)$  - многочлены степени  $l$  и  $m$  соответственно.

В этом случае частное решение уравнения (1) ищем в следующем виде:

$$y_{\text{ч.н}} = x^s e^{\alpha x} [P_k(x)\cos \beta x + Q_k(x)\sin \beta x], \quad (3)$$

где  $k = \max(l, m)$ ,  $P_k(x)$  и  $Q_k(x)$  - многочлены от  $x$  степени  $k$  общего вида с неопределенными коэффициентами, а  $s$  - кратность корня  $\lambda = \alpha + i\beta$  характеристического уравнения. (Если  $\alpha + i\beta$  не является корнем, то  $s = 0$ .) Разберем его решение на примерах.

Пример 1.  $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$ .

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Его характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -3$ .

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Теперь нужно найти частное решение неоднородного уравнения. Сравнивая его правую часть с формулой (3), видим, что  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ . Число  $\alpha + i\beta = -1$  корнем характеристического уравнения не является, следовательно,  $s = 0$ .  $P$  и  $Q$  - многочлены нулевой степени, следовательно, частное решение будем искать в виде

$$y_{ч.н} = A \cdot e^{-x}.$$

Удобно расположить  $y, y', y''$  в столбик, написав слева значения коэффициентов из исходного уравнения:

$$\begin{array}{l|l} -3 & y_{ч.н} = A e^{-x}; \\ 2 & y'_{ч.н} = -A e^{-x}; \\ 1 & y''_{ч.н} = A e^{-x}. \end{array}$$

Сложив всё, получим:

$$e^{-x}(-3A - 2A + A) = 4e^{-x}, \quad -4A = 4, \quad A = -1,$$

$$y_{ч.н} = -e^{-x},$$

а общее решение неоднородного уравнения

$$y_{o.н} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - e^{-x}.$$

Пример 2.

$$y'' + 4y = 3 \sin 2x.$$

Решение. Однородное уравнение имеет вид

$$y'' + 4y = 0,$$

его характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0, \quad \text{корни } \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Общее решение

$$y_{o.o} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Чтобы правильно выбрать вид частного решения неоднородного уравнения согласно формуле (3), сравним правую часть уравнения с общим её представлением по формуле (2). Очевидно,  $\alpha + i\beta = 2i$  является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому  $s = 1$ .

В физике это явление называется резонансом, суть его в совпадении собственной частоты колеблющейся системы и частоты приложенной внешней силы.

Кроме того, замечаем, что степени многочленов  $P$  и  $Q$  - нулевые. Вид частного решения:

$$y_{\text{ч.н}} = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\begin{array}{l} 4 \mid y_{\text{ч.н}} = x(A \cos 2x + B \sin 2x); \\ 0 \mid y'_{\text{ч.н}} = A \cos 2x + B \sin 2x - x2A \sin 2x + x2b \cos 2x; \\ 1 \mid y''_{\text{ч.н}} = 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x). \end{array}$$

В итоге

$$\begin{aligned} -4A \sin 2x + 4B \sin 2x &= 3 \sin 2x; \\ -4A &= 3, \quad A = -\frac{3}{4}, \quad B = 0, \quad y_{\text{ч.н}} = -\frac{3}{4}x \cos 2x. \end{aligned}$$

Общее решение:

$$y_{\text{о.н}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4}x \cos 2x.$$

Пример 3.

$$y'' - 3y' + 2y = f(x),$$

где  $f(x)$  равна:

$$1) 10e^{-x}, 2) 3e^{2x}, 3) 2 \sin x, 4) 2x^2 - 30, 5) 2e^x \cos \frac{x}{2}, 6) x + 1 - e^{-2x}.$$

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , корни его  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{о.о}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде  $y_{\text{ч.н}} = Ae^{-x}$ , так как из сопоставления правой части уравнения с формулой (2) очевидно, что  $\alpha = -1$  не является корнем характеристического уравнения, т.е. резонанса нет.

Подставив  $y_{\text{ч.н}}$  в исходное уравнение, получим

$$Ae^{-x} - (-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = 10e^{-x},$$

откуда

$$6A = 10, \quad A = \frac{5}{3}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$$

$$2. \quad y'' - 3y' + 2y = 3 \cdot e^{2x}.$$



Решение. Правая часть уравнения имеет вид  $Ae^{2x}$ ,  $\alpha = 2$  совпадает с корнем характеристического уравнения,  $s = 1$ , поэтому вид частного решения неоднородного уравнения  $y_{\text{ч.н}} = Axe^{2x}$ . Найдем  $A$ :

$$\begin{array}{l|l} 2 & y = Axe^{2x}; \\ -3 & y' = (2Ax + A)e^{2x}; \\ 1 & y'' = (2A + 4Ax + 2A)e^{2x}. \end{array}$$

После сложения получим

$$e^{2x}[x(2A - 6A + 4A) + (-3A + 4A)] = 3 \cdot e^{2x}, \quad Ae^{2x} = 3e^{2x}, \quad A = 3.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{ч.н}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

3.  $y'' - 3y' + 2y = 2 \sin x$ .

Решение. Правая часть уравнения имеет вид  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Корни характеристического уравнения не совпадают с числом  $\alpha + \beta i = \pm i$ , следовательно резонанса нет и частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н}} = A \cos x + B \sin x.$$

Подставив в уравнение, получим

$$A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x.$$

Приравняв коэффициенты при  $\sin x$  и  $\cos x$  в левой и правой частях равенства, имеем:

$$\begin{cases} A - 3B = 0; \\ 3A + B = 2, \end{cases} \quad \text{откуда } A = \frac{3}{5}, \quad B = \frac{1}{5}.$$

В итоге общее решение уравнения:

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

4.  $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$ .

Решение. Частное решение ищем в виде многочлена с неопределенными коэффициентами, степень которого совпадает со степенью многочлена в правой части уравнения:

$$y_{\text{ч.н}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

После подстановки в уравнение получаем

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 3x^3 - 30.$$

Приравняв коэффициенты при  $x^3, x^2, x$  и  $1$  слева и справа, имеем:

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -9A + 2B = 0, \\ 6A - 6B + 2C = 0, \\ 2B - 3C + 2D = -30. \end{cases}$$

Откуда

$$A = 1, \quad B = \frac{9}{2}, \quad C = \frac{21}{2}, \quad D = -\frac{15}{4}.$$

Общее решение уравнения

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}.$$

5.  $y'' - 3y' + 2y = 2 \cdot e^x \cos \frac{x}{2}.$

Решение. Частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x \left( A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right).$$

После подстановки в уравнение получаем:

$$A = -\frac{8}{5}, \quad B = -\frac{16}{5}.$$

Общее решение:

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{8}{5} e^x \left( \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

**Теорема (принцип суперпозиции или наложения).** Если  $y_i(x)$  являются решениями уравнений

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

то функция

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_k(x)$$

является частным решением уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x).$$

6.  $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}.$

Правую часть уравнения представим в виде суммы

$$f_1(x) = x + 1 \quad \text{и} \quad f_2(x) = -e^{-2x}$$

и найдем частные решения  $y_1$  и  $y_2$  уравнений

$$y'' - 3y' + 2y = x + 1 \quad \text{и} \quad y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}.$$

Методом неопределенных коэффициентов легко получить:

$$y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, \quad y_2 = -\frac{1}{12}e^{-2x}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции полагаем, что частное решение уравнения  $y_{ч.н} = y_1 + y_2$ . Тогда общее решение исходного уравнения:

$$y_{о.н} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}.$$

#### 5.14 Вопросы к экзамену по курсу «Ряды и ОДУ»

1. Понятие числового ряда. Сходящийся ряд, его сумма. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Основные свойства сходящихся рядов.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши-Маклорена.
4. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.
5. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
6. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля.
7. Радиус сходимости и область сходимости степенного ряда.
8. Промежутки равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда.
9. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда.
10. Разложение функций в степенные ряды. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора.
11. ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной. Определение решения. Постановка задачи Коши.
12. ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие поля направлений. Изоклины. Определение интегральной кривой. Определение существования задачи Коши. Теорема Пеано (формулировка). Единственность решения задачи Коши. Теорема Коши-Пикара (формулировка).
13. ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной. Определение точки единственности и неединственности решения задачи Коши. Область единственности. Определение частного и особого решений. Где могут располагаться особые решения?
14. ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной. Определение продолжения решения вправо (влево). Теорема о продолжимости.
15. ОДУ с разделяющимися переменными и приводимые к ним линейной заменой. Метод нахождения общего и особых решений.

16. Однородные ОДУ и приводимые к ним переносом начала координат. Метод нахождения общего и особых решений. Обобщенные однородные ОДУ.
17. Линейные ОДУ с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами. Нахождение области единственности и общего решения. Выяснить возможность существования особых решений. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод нахождения общего и особых решений.
18. ОДУ в полных дифференциалах.
19. Понятие интегрирующего множителя. Уравнение интегрирующего множителя. Нахождение интегрирующего множителя в простейших случаях.
20. ОДУ высших порядков, разрешенные относительно старшей производной. Определение решения. Задача Коши и определение общего решения.
21. ЛОДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами. Определение решения. Постановка задачи Коши и теорема Коши-Пикара для таких уравнений. Выяснить возможность существования особых решений.
22. Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций, определенных на интервале  $(a, b)$ . Доказать, что системы функций  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\} (n \in \mathbf{N})$  и  $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\} (\alpha_i \neq \alpha_j \text{ для } i \neq j, \text{ где } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ и все } \alpha_i \in \mathbf{R})$  линейно независимы на бесконечном интервале  $(-\infty, +\infty)$ .
23. Понятие определителя Вронского для системы функций  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ . Теорема о необходимом условии линейной зависимости системы функций  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ .
24. ЛООДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами. Теорема о линейной комбинации решений.
25. Определение фундаментальной системы решений (ФСР) ЛООДУ  $n$ -го порядка. Теорема о существовании ФСР у ЛООДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами. Теорема о структуре общего решения ЛООДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами.
26. Теорема Лиувилля-Остроградского и ее применение для нахождения общего решения ЛООДУ второго порядка, если известно одно нетривиальное частное решение этого уравнения.
27. ЛНОДУ  $n$ -го порядка с непрерывными на интервале  $(a, b)$  коэффициентами и правой частью. Теорема о структуре общего решения. Принцип суперпозиции.
28. Понятие операторного многочлена. Основные операции и свойства. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение ЛООДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Действие операторного многочлена на простейшие функции:  $e^{\lambda x}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$ ,  $e^{\lambda x} y(x)$ .

29. Вид общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.

30. Вид общего решения ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами в случае наличия кратных корней у характеристического уравнения.

### 5.15 Задачи по курсу «Ряды и обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right].$$

2. Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n^2 - \sqrt{n} + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\sqrt{n}).$$

3. Используя интегральный и необходимый признаки, исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  при

различных значениях  $p$ , исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с общим членом:

а)  $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ , б)  $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ , в)  $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ .

4. При каких значениях  $x$  сходятся ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} 3^n}{2n+1}$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n n^{2+1/n}}$ .

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с общим членом:

а)  $a_n = (-1)^n [\ln(n^2 + 5) - \ln(n^2 + 1)]$ , б)  $a_n = (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}}$ , в)  $a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n^n}$ .

6. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

а)  $y' = (x+1)(y+1)$ , б)  $(x+2)y' = y+3$ , в)  $(y^2+3)xdx + (x^2+2)ydy = 0$ , г)  $(1+x^2)dy + xydx = 0$ .

7. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка :

а)  $xy' - y = 4x^5 + 3x^2$ , б)  $xy' - 2y = 2x^4 + x^3$ , в)  $xy' + 2y = \frac{1}{x}$ , г)  $y' \sin x - y \cos x = 1$ .

8. Проверить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах;

а)  $(x+y)dy + (x-y)dx = 0$ , б)  $(x+y)dy - (x-y)dx = 0$ ,

9. в)  $(\cos x + 2y)dx + (\sin y + 2x)dy = 0$ , д)  $(\cos x + 2y)dx + (\sin y - 2x)dy = 0$ .

10. Решить дифференциальное уравнение в полных дифференциалах:

а)  $(3x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + 2y)dy = 0$ , б)  $(2x - y^3)dx + (5y^4 - 3xy^2)dy = 0$ ,

в)  $(\sin x + 2xy)dx + (\cos y + x^2)dy = 0$ , г)  $(\frac{1}{x} + y^2)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$ .

11. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка:

а)  $y' = 2xy$ ,  $y(0) = 2$ , б)  $y \ln y \, dx + xdy = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,

в)  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ,  $y(1) = 2$ , г)  $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

12. Понизить порядок дифференциального уравнения:

а)  $xy''' + y'' - x - 1 = 0$ , б)  $y'y''' - 3y'' = 2x^2$ , в)  $y''y^3 = 1$ , г)  $1 + (y')^2 = 2yy''$ .

13. Решить дифференциальное уравнение 2-го порядка, используя методы понижения порядка:

а)  $xy'' - y' = 2x^2$ , б)  $y'' + \frac{y'}{x} = 3x$ , в)  $y'' - 2yy' = 0$ , г)  $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$ .

14. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

а)  $y''' + 3y'' + 2y' = x - 1$ , б)  $y'' - 4y = -4$ , в)  $y' + y'' = 2x$ , г)  $y''' + 3y'' = 2e^x$ .

15. Найти решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

а)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6, y'(0) = 10$ , б)  $y''' - y' = 0$ ,  $y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$ ,

в)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 3$ , г)  $y'' + 2y' + y = 0$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

### 5.16 План семинаров по курсу «Ряды и обыкновенные дифференциальные уравнения»

**1 –е занятие.** Числовые ряды. Признаки сравнения для знакопостоянных числовых рядов.

**В аудитории.** Д.2546, 2550, 2588,2574, 2609

Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right].$$

**На дом:** Д.2547, 2549, 2556-2564, 2608-2610, 2613, 2614.

**2 –е занятие.** Знакопостоянные числовые ряды. Признаки: сравнения, интегральный, Даламбера, Коши.

**В аудитории.**

1. Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n^2 - \sqrt{n} + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\sqrt{n}).$$

2. Используя интегральный и необходимый признаки, исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  при различных значениях  $p$ .

3. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с общим членом:

а)  $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ , б)  $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ , в)  $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ .

4. При каких значениях  $x$  сходятся ряды:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} 3^n}{2n+1}$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n n^{2+1/n}}$ .

**На дом:** Д.2578-2588, 2589(б), 2619, 2620, 2626, 2631, 2632

**3 –е занятие.** Абсолютная и условная сходимость знакопеременных числовых рядов. Множества абсолютной и условной сходимости.

**В аудитории.**

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с общим членом:

а)  $a_n = (-1)^n [\ln(n^2 + 5) - \ln(n^2 + 1)]$ , б)  $a_n = (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}}$ , в)  $a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n^n}$ . 2. Д. 2718.

**На дом:** Д.2664, 2665, 2669, 2670, 2684, 2721, 2728, 2722.

**4 –е занятие.** Степенные и функциональные ряды. Нахождение областей абсолютной и условной сходимости.

**В аудитории.** М.2471,2475,2484,2489,Д.2812,2817,2840,2844

**На дом:** М.2470,2472,2483,2490.2491,Д.2814,2818,2841,2843

**5 –е занятие.** Разложение функций в степенные ряды.

**В аудитории.** М. 2503,2497(1,2,3)2508,2513,2545,Д.2794,2802,2803,2754

**На дом:** М.2504,2498,2507,2509,2512,2547,Д.2784,2800,2804,2809,2753

**6-е занятие.** Уравнения с разделяющимися переменными.

**В аудитории:** Б.3906,3913,3942,3939,3937.

**На дом:** Б.3902,3907,3914,3938,3941,3935.

**7-е занятие.** Однородные уравнения.

**В аудитории:** Ф. 105, 107, 101, 103, 111, 117, 115, 125, 127.

**На дом:** Ф. 102, 104, 110, 112, 114, 116, 118, 126, 128.

**8-е занятие.** Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати.

**В аудитории:** Б.3956,3958,3967,4043.

**На дом:** Б.3955,3957,3965,4042.

**9-е занятие.** Уравнения в полных дифференциалах.

**В аудитории:** Ф. 187, 189, 191, 196, 198, 200, пример на интегрирующий множитель.

**На дом:** Ф. 188, 190, 192, 193, 195, 199, 201, 206

**10-е занятие.** Уравнения, не разрешенные относительно производной.

**В аудитории:** Ф. 252, 269, 278, 281, 287, 289.

**На дом:** Ф. 253, 270, 279, 282, 290, 292, 293.

**11-е занятие.** Уравнения, допускающие понижение порядка.

**В аудитории:** Б.4162, 4165, 4177, 4194.

**На дом:** Б.4160, 4190, 4172, 4193 .

**12-е занятие.** Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные (случай специальной правой части).

**В аудитории:** Б.4251, 4257, 4260, 4304, 4305, 4307, 4310.

**На дом:** Б.4252, 4253, 4258, 4259, 4301, 4302, 4303, 4306.

**13-е занятие.** Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (метод вариации постоянных). Задача Коши.

**В аудитории:** Б.4275, 4271.

**На дом:** Б.4276, 4278, 4279.

**14-е занятие.** Определитель Вронского. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (случай простых вещественных корней)

**В аудитории:** Ф. 614, 615, 675, 786, 788, 799.

**На дом:** Ф. 613, 616, 674, 787, 798, 800.

**15-е занятие.** Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами (случай специальной правой части и метод вариации постоянных)

**В аудитории:** Ф. 828, 826, 827, 842, 846, 848.

**На дом:** Ф. 829, 831, 831, 834, 847, 849.

М.- В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике.- М.:Наука,1987.

Д. – Б.П. Демидович. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Наука, 1977.

(Ф.)- А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979.

(Б.)- Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1977, 1998, 2005.

(К.)-Н.Ш. Кремер. Высшая математика для экономических специальностей. Ч.2. М.: Высшее образование, 2005.