ЛЕКЦИЯ 18

Интервал. Геометрия Минковского. Инвариантность интервала. Времениподобный и пространственноподобный интервалы. Абсолютно будущие события, абсолютно прошедшие события, абсолютно удаленные события. Световой конус.

Интервал. Геометрия Минковского

В теории относительности часто используется понятие **события**. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, произошедшее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда это событие произошло: x, y, z и t.

В дальнейшем из соображений наглядности мы будем пользоваться воображаемым **четырехмерным** пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве любое событие изображается точкой. Эти точки называются **мировыми точками**. Всякой частице соответствует некоторая линия — **мировая линия** в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Если частица покоится или движется равномерно и прямолинейно, то ей соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности величины скорости света [1] математически. Для этого рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем так, чтобы оси x и x' совпадали, а оси y и z были бы параллельны осям y' и z'. Время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что из точки с координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 (в системе отсчета K) отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света. Будем наблюдать из системы отсчета K за распространением этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что этот сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Поскольку сигнал распространяется со скоростью света c, пройденное им расстояние равно $c(t_2-t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно

[1] т. е. ее независимости от выбора инерциальной системы отсчета.

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. В результате оказывается справедливым следующее соотношение между координатами обоих событий в системе K

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \tag{1}$$

Те же два события, т.е. распространение светового сигнала, можно наблюдать из системы K'. Пусть координаты первого события в системе K': x_1', y_1', z_1', t_1', а второго: x_2', y_2', z_2', t_2'. Поскольку скорость света в системах K и K' одинакова, то аналогично (1) имеем:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \tag{2}$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \tag{3}$$

называется **интервалом** между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что

если интервал между двумя событиями равен нулю в одной инерциальной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой инерциальной системе.

Если два события бесконечно близки друг другу, то для интервала ds между ними имеем

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{4}$$

Форма выражений (3) и (4) позволяет рассматривать интервал, с формальной математической точки зрения, как “расстояние” между двумя точками в воображаемом четырехмерном пространстве (на осях которого откладываются значения x, y, z и произведение ct). Имеется, однако, существенное отличие в правиле составления этой величины по сравнению с правилами обычной евклидовой геометрии: при образовании квадрата интервала квадрат разности координат по временной оси входит со знаком плюс, а квадраты разностей пространственных координат — со знаком минус. Такую четырехмерную геометрию, определяемую квадратичной формой (4), называют **псевдоевклидовой** в отличие от обычной, евклидовой, геометрии. Эта геометрия в связи с теорией относительности была введена **Г. Минковским** [2].

[2]Герман Минковский (нем. Hermann Minkowski; 22 июня 1864, Алексоты Ковенской губернии — 12 января 1909, Гёттинген) — немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности. Был одним из учителей Альберта Эйнштейна в Цюрихе.

Рис. 1: Герман Минковский (Германия) 1864-1909.

Инвариантность интервала

Как мы показали выше, если $ds = 0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds' = 0$ в любой другой инерциальной системе. Но ds и ds' — бесконечно малые величины одинакового порядка малости. Поэтому в общем случае из этих двух условий следует, что ds^2 и ds'^2 должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds^2 = a\,ds'^2. \tag{5}$$

Коэффициент пропорциональности a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости $\mathbf{V}$ обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы неравноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может также зависеть от направления относительной скорости $\mathbf{V}$, так как это противоречило бы изотропии пространства.

Поскольку системы K и K' полностью равноправны по отношению друг к другу, то по аналогии с (5) имеет место равенство

$$ds'^2 = a\,ds^2. \tag{6}$$

Из этих двух соотношений следует, что $a^2 = 1$. Таким образом величина a является константой и не зависит от относительной скорости двух систем K и K'. Имеется лишь две возможности: $a = +1$, или $a = -1$. Какая из них реализуется на самом деле можно понять, если рассмотреть частный случай $\mathbf{V} = 0$. Тогда очевидно, что $ds^2 = ds'^2$, т. е. $a = +1$, поскольку обе системы K и K' в этом случае совпадают друг с другом.

Таким образом,

$$ds^2 = ds'^2, \tag{7}$$

а из равенства бесконечно малых интервалов следует равенство также и конечных интервалов

$$s = s'. \tag{8}$$

Мы пришли, таким образом, к очень важному результату:

интервал между двумя любыми событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. он является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой.

Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Времениподобный и пространственноподобный интервалы

Рассмотрим теперь два события с координатами x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 соответственно в некоторой системе отсчета K. Спрашивается, существует ли такая система отсчета K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства. Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2. \tag{9}$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе K равен

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \tag{10}$$

а в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \tag{11}$$

Поскольку интервал — величина инвариантная, то

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \tag{12}$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l'_{12} = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0. \tag{13}$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют **времениподобными**.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{14}$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}. \tag{15}$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. По-прежнему мы можем записать, что $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}$. Мы хотим, чтобы $t'_{12} = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0. \tag{16}$$

Следовательно, такая система отсчета существует если интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют **пространственноподобными**. Расстояние между точками, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}. \tag{17}$$

Поскольку интервал — величина инвариантная, то их подразделение на времениподобные и пространственноподобные — понятие **абсолютное**. Иными словами, свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчета.

Абсолютно будущие, абсолютно прошедшие и абсолютно удаленные события

Возьмем какое-нибудь событие, пусть это будет событие O, в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. По осям этой четырехмерной системы координат будем откладывать значения x, y, z и ct. Определим теперь, в каком отношении к этому событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы ограничимся только одной пространственной координатой и временем, откладывая их на двух осях. Так прямолинейное и равномерное движение частицы, проходящей точку

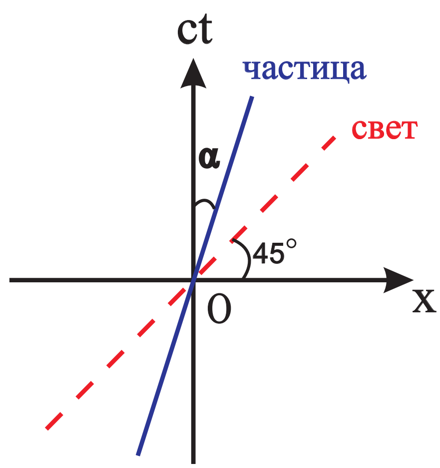

Рис. 2: Движение частицы (со скоростью v) и луча света (со скоростью c). $\operatorname{tg} \alpha = v/c$.

$x = 0$ в момент времени $t = 0$, будет изображаться прямой линией, проходящей через начало координат O и наклоненой к оси ct под углом α, тангенс которого равен отношению скорости частицы к скорости света v/c. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c, то наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью ct, очевидно, равен $45°$.

На рис. 3 сплошной линией изображены две прямые ab и cd, изображающие распространение со скоростью света двух сигналов в противоположных направлениях вдоль оси x и проходящих через начало координат в момент времени $t = 0$. Все линии, изображающие движение частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x = \pm ct$.

Рассмотрим теперь события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Во всех точках этой области $c^2t^2 - x^2 > 0$, т. е. интервал между любым событием в этой области и событием O — времениподобный. В этой области $t > 0$, т. е. все события этой области происходят

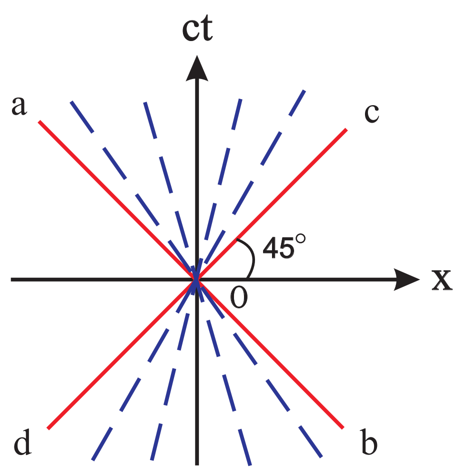

Рис. 3: Область движения материальных частиц, проходящих точку $x = 0$ в момент времени $t = 0$.

"после" события O. Но два события, разделенные времениподобным ин-

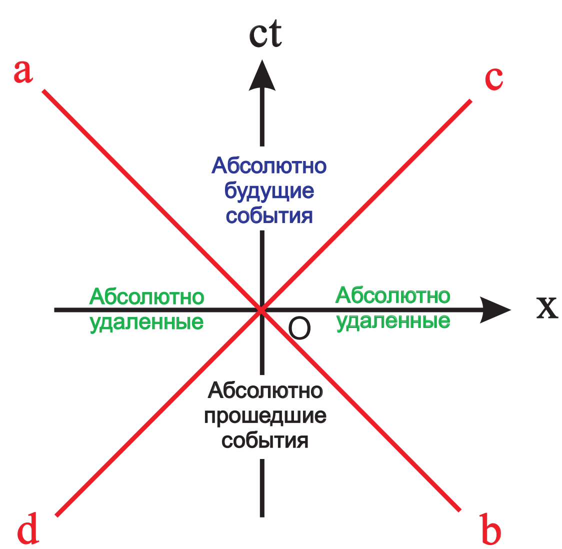

Рис. 4: Разбиение пространства-времени на абсолютно будущие, абсолютно прошедшие и абсолютно удаленные события.

тервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где какое-нибудь из событий области aOc происходило бы "до" события O, т. е. когда было бы $t < 0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчета. По этой причине эту область можно назвать **абсолютно будущей** по отношению к событию O.

Рассуждая аналогичным образом, мы приходим к выводу, что все события области bOd являются **абсолютно прошедшими** по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O.

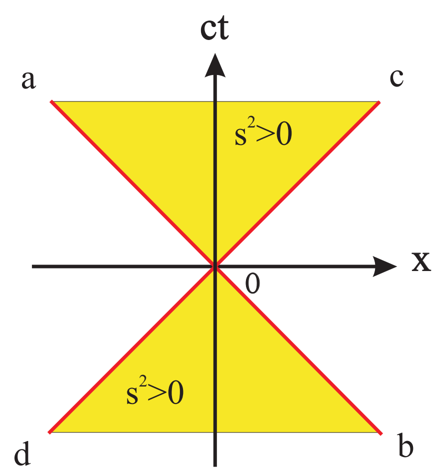

Рис. 5: Заштрихованная область соответствует времениподобным интервалам.

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb. Интервал между любым

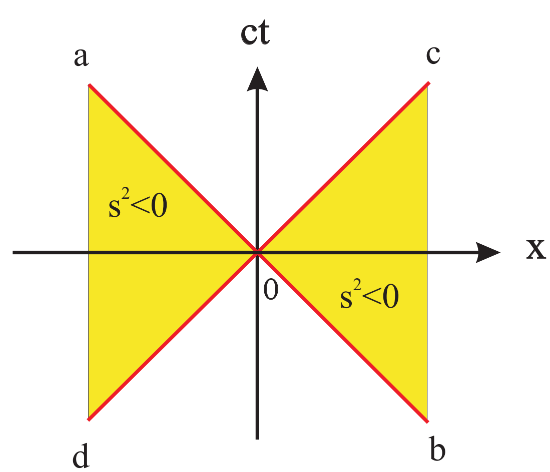

Рис. 6: Заштрихованная область соответствует пространственноподобным интервалам.

событием этой области и событием O — пространственноподобный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать **абсолютно удаленными** по отношению к O. Понятия "одновременно", "раньше" и "позже" для этих событий, однако, относительны. Для всякого события из этой области найдутся такие системы отсчета, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O.

Световой конус

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых ab и dc на рис. 4,

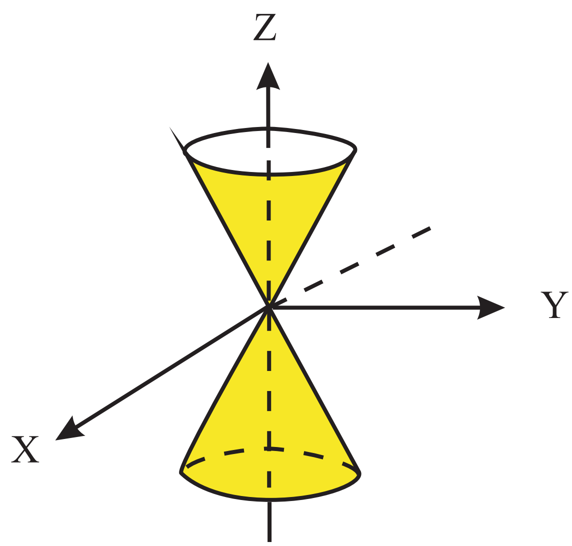

Рис. 7: Обычный конус.

мы имели бы “конус”

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{18}$$

в четырехмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t. Этот конус называют **световым конусом**. Области “абсолютно будущего” и “абсолютно прошедшего” изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса. Здесь имеется полная аналогия с евклидовой геометрией, в которой конус, изображенный на рис. 7, описывается уравнением

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0. \tag{19}$$

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, так как никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью света. Как мы только что убедились, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия “раньше” и “позже”, что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

1 Герман Минковский

Герман Минковский (нем. Hermann Minkowski; 22 июня 1864, Алексоты Ковенской губернии — 12 января 1909, Гёттинген) — немецкий математик, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырёхмерную модель теории относительности.

Биография

Герман Минковский родился в Алексотах (пригороде Каунаса в сегодняшней Литве, в то время входивших в состав Ковенской губернии), в семье немецких граждан еврейского происхождения, Левина Минковского и Рахиль Таубман. В 1872 году семья вернулась в Германию, в город Кёнигсберг.

В 1879 году Герман закончил гимназию. Далее он учился в университетах Кёнигсберга и Берлина у Линдемана, Кронекера, Вейерштрасса и других крупных математиков. Среди его друзей-студентов — Давид Гильберт.

В 1881 году студент Минковский послал статью по теории квадратичных форм на конкурс Парижской Академии. Хотя работа, вопреки условиям конкурса, была написана по-немецки, она получила премию и восторженные отзывы жюри (1883). В 1885 году Минковский получает докторскую степень. Диссертация тоже относилась к теории квадратичных форм в пространстве произвольного числа переменных.

Некоторое время Минковский преподавал в университете Кёнигсберга, затем переехал в Бонн (1887), сначала экстраординарным (1892), а затем ординарным (1894) профессором. В 1895 году Минковский возвращается в Кёнигсберг, но вскоре переезжает в Цюрих (1896). В Цюрихе он был одним из учителей Альберта Эйнштейна и Вальтера Ритца.

С 1902 года и до конца жизни Минковский работал в Гёттингенском университете, профессором математики, рядом с близким другом Гильбертом. В 1896 он публикует монографию «Геометрия чисел», в которой собрал все полученные достижения в этой области. В 1907 Минковский публикует ещё одну монографию «Диофантовы приближения».

В 1907–1909 годах Минковский выступил с рядом статей и лекций, где предложил так называемую «геометродинамику» — четырёхмерную математическую модель кинематики теории относительности. В 1909 году вышла его книга «Пространство и время», которой суждено было стать его научным завещанием. Альберт Эйнштейн исключительно высоко ценил вклад Минковского в развитие релятивистской теории.

В 1909 году Минковский внезапно скончался от аппендицита в Гёттингене. Гильберт издал в 1911 году полное собрание трудов своего друга.

В честь учёного названы кратер Minkowski на Луне и астероид 12493 (Minkowski).

Научная деятельность

Первые результаты Минковского касались теории квадратичных форм. В 1896 году он представил знаменитую лемму, известную как «Теорема Минковского о выпуклом теле» — о том, что выпуклая область n-мерного пространства, объёмом $\geq 2^n$ и симметричная относительно начала координат, непременно содержит точку с целочисленными координатами, отличную от начала координат. По словам Касселса, вся геометрия чисел основана на этой лемме. После создания геометрии чисел Минковский много и плодотворно работает над применением полученных результатов в других областях теории чисел: диофантовы приближения, теория многогранников и другие. Ему принадлежат фундаментальные достижения в геометрии выпуклых тел.

В 1907 году Минковский предложил геометрическое представление кинематики теории относительности, введя четырёхмерное псевдоевклидово пространство (известное сейчас как пространство Минковского). В этой модели время и пространство представляют собой не различные сущности, а являются взаимосвязанными измерениями единого пространства-времени, а все релятивистские эффекты получили наглядное геометрическое истолкование. Минковский провозгласил:

> Отныне время само по себе и пространство само по себе становятся пустой фикцией, и только единение их сохраняет шанс на реальность.

Модель Минковского существенно помогла Эйнштейну в разработке общей теории относительности, полностью опирающейся на аналогичные идеи.

Серьёзный вклад Минковский внёс также в гидродинамику и теорию капиллярности. Он высказал некоторые гипотезы о силовых действиях света в прозрачной среде, которые недавно отдельные СМИ поставили под сомнение, истолковав результаты недавних экспериментов в пользу альтернативной гипотезы Абрагама. Однако член-корреспондент РАН Анатолий Шалагин считает вывод о правоте модели Абрагама ошибочным (см. http://lenta.ru/news/2009/01/12/light/).

Задачи

1. В некоторой галактике в нашей Вселенной произошел взрыв сверхновой. Этот взрыв наблюдается в двух других удаленных галактиках A и B. Пусть одно событие заключается в прибытии светового импульса от взрыва сверхновой в галактику A, а второе событие — в прибытии аналогичного светового импульса в галактику B. Какой интервал времениподобный, пространственноподобный или нулевой между этими двумя событиями?

2. Предыдущую задачу можно сформулировать и так. С Земли в двух противоположных направлениях одновременно посылается световой импульс в направлении двух далеких галактик A и B. Пусть одно событие заключается в прибытии светового импульса в галактику A, а второе событие — в прибытии другого светового импульса в галактику B. Какой интервал времениподобный, пространственноподобный или нулевой между этими двумя событиями? Как измениться ответ, если световые импульсы посланы во взаимно перпендикулярных направлениях друг к другу? Под углом φ друг к другу? В одном и том же направлении?

3. Как изменяться ответы в предыдущей задаче если световые импульсы заменить ракетами, движущимися с одинаковой скоростью $v < c$? Проанализировать возможные ситуации в зависимости от угла φ.

Анекдот

— Никак не могу найти себе помощника, — пожаловался однажды Эдисон Эйнштейну. — Каждый день заходят молодые люди, но ни один не подходит.
— А как Вы определяете их пригодность? — поинтересовался Эйнштейн.
Эдисон показал ему листок с вопросами.
— Кто на них ответит, тот и станет моим помощником. “Сколько миль от Нью-Йорка до Чикаго?” — прочёл Эйнштейн и ответил: “Нужно заглянуть в железнодорожный справочник”. “Из чего делают нержавеющую сталь?” — “Об этом можно узнать в справочнике по металловедению...”.
Пробежав глазами остальные вопросы, Эйнштейн сказал:
— Не дожидаясь отказа, свою кандидатуру снимаю сам.