ГЛАВА VI. ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В. А. Шарафутдинов

Обратите внимание, что пока глава 3 (теория Морса) стоит особняком в нашем курсе, главы 4 и 5 независимы от нее. В настоящей главе мы привлечем основные идеи теории Морса к изучению пространства путей риманова многообразия.

Значение настоящей главы состоит также в том, что она в некоторой степени восполняет пробел в математическом образовании, образовавшийся после исключения *вариационного исчисления* из числа обязательных курсов, читаемых на математическом факультете. Принято считать, что этот курс стал частью функционального анализа; хотя в реальности это утверждение далеко от истины. Правда, некоторые важные понятия вариационного исчисления сохранились в курсе теоретической механики (уравнения Эйлера – Лагранжа, канонические уравнения, гамильтонов формализм, вариационные принципы), но их общематематическое значение зачастую недостаточно подчеркивается. Рассматриваемая в этой главе геометрическая вариационная задача является образцом, на котором обычно отрабатываются гипотезы и методы для других задач вариационного исчисления. Несомненно, что читатель, ознакомившийся с настоящей главой, сможет затем без больших усилий освоить вариационное исчисление, например, по великолепному учебнику [1].

1. Пространство путей гладкого многообразия

Пусть M — гладкое многообразие и p, q — две его точки (не обязательно различные). *Кусочно-гладким путем* из p в q будем называть отображение $\omega : [0,1] \to M$, такое, что

(1) существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ отрезка $[0,1]$, для которого ограничение $\omega|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to M$ есть гладкое отображение для каждого $1 \le i \le k$;

(2) $\omega(0) = p$ и $\omega(1) = q$.

Подчеркнем, что из (1) следует непрерывность отображения ω. Множество всех кусочно-гладких путей из p в q будем обозначать через $\Omega(M; p, q)$. Впрочем, это обозначение будет обычно сокращаться до $\Omega(p, q)$ или даже до Ω.

Позднее мы снабдим Ω топологией, но пока этого не нужно. Мы рассматриваем Ω как нечто вроде "бесконечномерного многообразия". Чтобы реализовать эту аналогию, начнем со следующего определения.

Касательным пространством в точке $\omega \in \Omega$ назовем пространство всех кусочно-гладких векторных полей $W(t)$ вдоль пути ω, удовлетворяющих $W(0) = 0$ и $W(1) = 0$. Это (бесконечномерное) векторное пространство будет обозначаться через $T_\omega\Omega$.

Рассмотрим действительную функцию $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Следуя традициям вариационного исчисления, будем впредь такие функции именовать *(нелинейными) функционалами*, подчеркивая тем самым, что область определения F сама состоит из функций (в нашем случае из путей). Естественно попытаться определить дифференциал

$$d_\omega F : T_\omega\Omega \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

этого функционала в точке $\omega \in \Omega$. Для этого воспользуемся следующей аналогией.

Date: апрель 2013, Кольцово.

Если $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на гладком многообразии M, то дифференциал $d_pf : T_pM \to \mathbb{R}$ может быть определен следующим образом. Для $X \in T_pM$ рассмотрим такую гладкую кривую $u \mapsto \sigma(u)$ $(-\delta < u < \delta)$, что $\sigma(0) = p$ и $\frac{d\sigma}{du}(0) = X$. Тогда $(d_pf)(X) = \frac{d(f(\sigma(u))}{du}\Big|_{u=0}$.

Чтобы провести аналогичное построение для $F : \Omega \to \mathbb{R}$, введем следующее

Определение 1.1. *(Однопараметрической) вариацией пути $\omega \in \Omega$ (с неподвижными концами) называется отображение*

$$\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega,$$

определенное для некоторого $\delta > 0$ и такое, что

(1) $\overline{\sigma}(0) = \omega$*;*

(2) *существует разбиение* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ *отрезка* $[0, 1]$*, для которого отображение*

$$\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \to M, \quad \sigma(t, u) = \overline{\sigma}(u)(t)$$

является гладким на каждом прямоугольнике $[t_{i-1}, t_i] \times (-\delta, \delta)$ $(1 \le i \le k)$*.*

Заметим, что так как каждый путь $\overline{\sigma}(u)$ принадлежит $\Omega(M; p, q)$, то

(3) $\sigma(0, u) = p,\ \sigma(1, u) = q$ *для всех* $u \in (-\delta, \delta)$*.*

Под вариацией в дальнейшем мы будем понимать либо σ либо $\overline{\sigma}$.

Это определение во многом повторяет введенное в §4 главы 5 понятие параметризованной поверхности за исключением двух существенных деталей: (а) вместо гладкости отображения σ мы теперь предполагаем лишь кусочную гладкость и (б) мы требуем, чтобы начало и конец пути ω оставались неподвижными при вариации. Впрочем, в дальнейшем нам придется иногда отказываться от этого требования, рассматривая вариации "со свободными концами". Кроме того, в дальнейшем мы встретимся с "двупараметрическими вариациями", в которых участвуют два параметра (u_1, u_2).

Если $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$ — вариация пути ω, то *векторным полем вариации* называется векторное поле $W \in T_\omega\Omega$, определяемое равенством

$$W(t) = \Big(\frac{d\overline{\sigma}}{du}(0)\Big)(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t, 0).$$

Если $\overline{\sigma}(u)$ интерпретируется как "гладкая кривая" в Ω, то W есть "вектор скорости" этой кривой в точке $\omega = \overline{\sigma}(0)$. Заметим, что для любого $W \in T_\omega\Omega$ существует вариация $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$, удовлетворяющая $\overline{\sigma}(0) = \omega$ и $\frac{d\overline{\sigma}}{du}(0) = W$. Действительно, можно положить

$$\overline{\sigma}(u)(t) = \exp_{\omega(t)}(uW(t)).$$

Пусть $F : \Omega \to \mathbb{R}$ — функционал. Попытаемся определить дифференциал (1.1) следующим образом, действуя по аналогии с приведенным после (1.1) абзацем. Для $W \in T_\omega\Omega$ выберем такую вариацию $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$, что

$$\overline{\sigma}(0) = \omega, \quad \frac{d\overline{\sigma}}{du}(0) = W,$$

и положим

$$(d_\omega F)(W) = \frac{d(F(\overline{\sigma}(u)))}{du}\Big|_{u=0}.$$

Конечно, без дополнительных предположений о функционале F нельзя ручаться, что эта производная существует и что она не зависит от выбора вариации $\overline{\sigma}$. Мы не станем сейчас исследовать условия, гарантирующие существование этой производной. Последняя формула приведена лишь для того, чтобы мотивировать следующее определение.

Определение 1.2. *Путь $\omega \in \Omega$ называется критической точкой (или экстремалью) функционала $F : \Omega \to \mathbb{R}$, если производная $\left.\frac{d(F(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0}$ существует и равна нулю для любой вариации пути ω.*

Сравните это с приведенным в §1 главы 3 определением критической точки функции. Например, если F достигает минимума на пути ω_0 и все производные $\frac{d(F(\overline{\sigma}(u)))}{du}$ определены, то ω_0 — критический путь.

2. Функционал длины и функционал энергии

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Напомним, что для пути $\omega \in \Omega$ и $0 \leq a \leq b \leq 1$ длина отрезка $\omega|_{[a,b]}$ этого пути определяется равенством

$$L_a^b(\omega) = \int\limits_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(\omega(t)) \frac{d\omega^i(t)}{dt} \frac{d\omega^j(t)}{dt}}\, dt. \tag{2.1}$$

Присутствие квадратного корня в подынтегральном выражении значительно затрудняет изучение этого функционала. С аналитической точки зрения более простым является *функционал энергии*

$$E_a^b(\omega) = \int\limits_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt = \int\limits_a^b g_{ij}(\omega(t)) \frac{d\omega^i(t)}{dt} \frac{d\omega^j(t)}{dt}\, dt. \tag{2.2}$$

Название “функционал энергии” является общепринятым в геометрии и мы будем им пользоваться, хотя с физической точки зрения более правильным является термин “функционал действия”.

Сравним функционалы (2.1) и (2.2). Согласно неравенству Коши – Буняковского

$$\left(\int\limits_a^b fg\, dt \right)^2 \leq \left(\int\limits_a^b f^2\, dt \right) \left(\int\limits_a^b g^2\, dt \right),$$

примененного к $f(t) = 1$ и $g(t) = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$, имеем

$$\left(L_a^b\right)^2 \leq (b-a) E_a^b,$$

причем равенство достигается только для постоянной функции g, т.е. тогда и только тогда, когда параметр t пропорционален длине дуги.

Предположим теперь, что существует кратчайшая геодезическая $\gamma : [0,1] \to M$, соединяющая $p = \omega(0)$ с $q = \omega(1)$. Тогда

$$E(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\omega) \leq E(\omega).$$

Здесь равенство $L^2(\gamma) = L^2(\omega)$ возможно, только если ω — также кратчайшая геодезическая, быть может иначе параметризованная. С другой стороны, равенство $L^2(\omega) = E(\omega)$ возможно, только если параметр t пропорционален длине дуги ω. Итак, $E(\gamma) < E(\omega)$, кроме случая, когда ω — тоже кратчайшая геодезическая. Тем самым доказано

Предложение 2.1. *Пусть M — полное риманово многообразие, и пусть расстояние между точками $p, q \in M$ равно d. Тогда функционал энергии*

$$E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$$

достигает минимума d^2 в точности на кратчайших геодезических, соединяющих p и q.

3. Формула первой вариации

Пусть p, q — две точки риманова многообразия M. Рассмотрим вариацию $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$ пути $\omega \in \Omega(M; p, q)$ и вычислим производную $\frac{d(E(\overline{\sigma}(u))}{du}\Big|_{u=0}$. Дифференцируя равенство

$$E(\overline{\sigma}(u)) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\|^2 dt$$

и пользуясь правилом дифференцирования скалярного произведения, имеем

$$\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du} = 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Согласно лемме 4.1 предыдущей главы, $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ и формула приобретает вид

$$\frac{1}{2} \frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du} = \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \tag{3.1}$$

Далее мы собираемся преобразовать интеграл из (3.1) путем интегрирования по частям. При этом необходима некоторая осторожность так как функция σ лишь кусочно-гладкая и подынтегральное выражение имеет разрывы в некоторых точках. Поэтому поступим следующим образом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ для которого ограничение вариации σ на каждый прямоугольник $[t_{i-1}, t_i] \times (-\delta, \delta)$ $(1 \le i \le k)$ гладко. Перепишем (3.1) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du} = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \tag{3.2}$$

Теперь мы можем преобразовать каждый из интегралов в (3.2) путем интегрирования по частям. Для этого сначала преобразуем подынтегральное выражение, выделяя производную по t:

$$\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle.$$

Интегрируя, получаем

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}+0} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt,$$

где $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle\Big|_{t=t_i-0}$ — значение функции $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle$ в правом конце отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, не совпадающее со значением $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle\Big|_{t=t_i+0}$ этой функции в левом конце отрезка

$[t_i, t_{i+1}]$. Подставляя последнюю формулу в (3.2), записываем результат в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du} = \sum_{i=1}^{k}\left(\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_{i-1}+0}\right) - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle dt. \tag{3.3}$$

Перегруппируем слагаемые суммы в (3.3), объединив $\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\big|_{t=t_i+0}$ и $\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\big|_{t=t_i-0}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\left(\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_{i-1}+0}\right)\\ &= -\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_0+0} + \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_k-0} - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i+0} - \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i-0}\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Первые два слагаемых в правой части равны нулю поскольку σ — вариация с неподвижными концами. Заметим также, что функция $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ непрерывна и следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i+0} - \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i-0} = \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle,$$

где $\Delta_{t_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\big|_{t=t_i+0} - \frac{\partial\sigma}{\partial t}\big|_{t=t_i-0}$ — скачок функции $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ в точке t_i. Таким образом (3.4) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=t_{i-1}+0}\right) = -\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle.$$

Подставим это значение в (3.3)

$$\frac{1}{2}\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du} = -\sum_{i=1}^{k-1}\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle dt. \tag{3.5}$$

Теперь полагаем $u = 0$ в (3.5). Вспоминаем, что $\frac{\partial\sigma}{\partial t}(t,0) = \dot\omega(t)$ есть вектор скорости пути ω и $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0) = W(t)$ есть векторное поле вариации σ. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\left.\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = -\sum_{i=1}^{k-1}\langle W(t_i), \Delta_{t_i}\dot\omega\rangle - \int_0^1 \left\langle W(t), \frac{D\dot\omega}{\partial t}(t)\right\rangle dt.$$

Тем самым доказана

Теорема 3.1. (формула первой вариации) *Пусть p, q — две точки риманова многообразия M и $\omega \in \Omega(M; p, q)$. Для любой вариации $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$ пути ω справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\left.\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = -\sum_{t}\langle W(t), \Delta_t\dot\omega\rangle - \int_0^1 \left\langle W(t), \frac{D\dot\omega}{dt}(t)\right\rangle dt, \tag{3.6}$$

где $W(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$ — векторное поле вариации σ и $\Delta_t\dot\omega = \dot\omega(t+0) - \dot\omega(t-0)$ — скачок вектора скорости в точке t. Сумма в правой части равенства (3.6) содержит конечное число слагаемых, соответствующих точкам излома пути ω.

Формула (3.6) имеет наглядный смысл. Сумма в правой части говорит о том, что изменение пути ω в направлении излома уменьшает энергию пути (см. Рис. 1). Интеграл в правой части формулы означает, что изменение пути ω в направлении вектора ускорения $\frac{D\dot\omega}{\partial t}$ также уменьшает энергию пути.

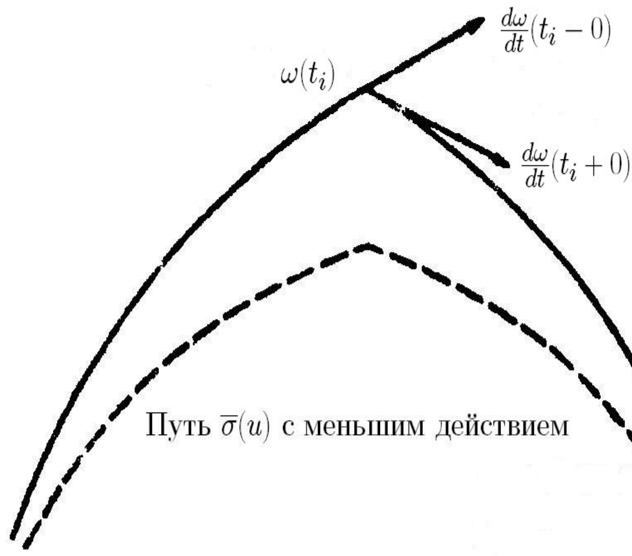

Рис. 1

Напомним, что в конце §1 мы оставили без рассмотрения вопрос о существовании производной $\frac{d(F(\overline{\sigma}(u))}{du}\Big|_{u=0}$ для произвольного функционала $F:\Omega\to\mathbb{R}$. Формула (3.6) дает положительный ответ на этот вопрос для функционала энергии: производная $\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\Big|_{u=0}$ определена для любой вариации пути ω и зависит лишь от векторного поля W вариации, причем эта зависимость — линейная. Тем самым корректно определен линейный оператор

$$d_\omega E: T_\omega\Omega\to\mathbb{R},\quad (d_\omega E)(W)=\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\Big|_{u=0}\quad\text{для}\quad W(t)=\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0),\tag{3.7}$$

который называется *дифференциалом функционала энергии* в точке $\omega\in\Omega$.

Теорема 3.2. *Экстремалями функционала энергии $E:\Omega(M;,p,q)\to\mathbb{R}$ являются параметризованные отрезком $[0,1]$ геодезические, идущие из p в q, и только они. Другими словами, дифференциал (3.7) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда путь ω есть геодезическая.*

Доказательство. Для геодезической правая часть формулы (3.6) равна нулю поскольку вектор ускорения равен нулю и геодезическая не имеет изломов.

Обратно, пусть $\omega\in\Omega$ — экстремаль, т.е. $\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\Big|_{u=0}=0$ для любой вариации пути ω. Напомним, что любое векторное поле $W\in T_\omega\Omega$ является векторным полем некоторой вариации. Выберем сначала это векторное поле в виде

$$W(t)=f(t)\frac{D\dot\omega}{dt}(t),$$

где $f(t)$ — некоторая гладкая функция на $[0,1]$, обращающаяся в нуль в точках излома пути ω и в концах отрезка $[0,1]$, и положительная во всех остальных точках. Тогда $\langle W(t), \Delta_t \dot\omega\rangle = 0$ при всех t и формула (3.6) дает

$$0 = \frac{1}{2}\left.\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = \int\limits_0^1 f(t)\left\|\frac{D\dot\omega}{dt}(t)\right\|^2 dt.$$

В силу положительности f отсюда следует, что вектор ускорения $\frac{D\dot\omega}{dt}$ тождественно равен нулю, т.е. ω есть ломаная геодезическая.

Выберем теперь вариацию так, что $W(t_i) = \Delta_{t_i}\dot\omega$ во всех точках излома пути ω. Тогда

$$0 = \frac{1}{2}\left.\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = -\sum_i \|\Delta_{t_i}\dot\omega\|^2.$$

Следовательно, все $\Delta_{t_i}\dot\omega$ равны нулю и ω принадлежит классу C^1 даже в точках t_i. Теперь из теоремы о единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений вытекает, что ω принадлежит классу C^∞ и является геодезической. □

Замечание. Внимательный читатель может заметить аналогию между приведенным доказательством теорем 3.1–3.2 и выводом уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей произвольного функционала $F(\omega) = \int_0^1 L(\omega, \dot\omega, t)\,dt$, как он обычно приводится в курсе теоретической механики. Единственное отличие состоит в том, что традиционно уравнение Эйлера — Лагранжа рассматривается лишь для гладких вариаций, а мы рассмотрели более общий случай кусочно-гладких вариаций.

Упражнения

1. Докажите следующее обобщение формулы первой вариации. Пусть $\omega \in \Omega(M; p, q)$ и $\sigma : [0,1]\times(-\delta,\delta) \to M$ — вариация *со свободными концами* пути ω (т.е. не требуется, чтобы $\sigma(0,u) = p$ и $\sigma(1,u) = q$). Тогда

$$\frac{1}{2}\left.\frac{d(E(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = \langle W(1), \dot\omega(1)\rangle - \langle W(0), \dot\omega(0)\rangle - \sum_t \langle W(t), \Delta_t\dot\omega\rangle - \int\limits_0^1 \left\langle W(t), \frac{D\dot\omega}{dt}(t)\right\rangle dt,$$

где $W(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$.

2. Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — геодезическая и $\sigma : [0,1]\times(-\delta,\delta) \to M$ — геодезическая вариация со свободными концами пути γ (см. определение в §4 главы 5). Тогда (докажите)

$$\left.\frac{d(L(\overline{\sigma}(u)))}{du}\right|_{u=0} = \left\langle J(1), \frac{\dot\gamma(1)}{\|\dot\gamma(1)\|}\right\rangle - \left\langle J(0), \frac{\dot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0)\|}\right\rangle,$$

где $J(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$ — поле Якоби вдоль γ.

4. Формула второй вариации

Вспомним ход наших рассуждений в §2 главы 3. Для критической точки p гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$ мы определили гессиан

$$H_p f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

как симметричную билинейную форму, матрица которой в локальных координатах совпадает с матрицей вторых частных производных функции f в точке p. Легко видеть, что для $X_1, X_2 \in T_pM$ значение гессиана $(H_pf)(X_1, X_2)$ может быть найдено следующим образом. Выберем гладкое отображение $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to M$, удовлетворяющее

$$\overline{\sigma}(0,0) = p, \quad \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial u_1}(0,0) = X_1, \quad \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial u_2}(0,0) = X_2.$$

Тогда $(H_pf)(X_1, X_2) = \frac{\partial^2 f(\overline{\sigma}(u_1,u_2))}{\partial u_1\,\partial u_2}\Big|_{(0,0)}$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — геодезическая в римановом многообразии и $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. Согласно теореме 3.2, γ есть критическая точка (экстремаль) функционала энергии $E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$. Действуя по аналогии с предыдущим абзацем, определим *гессиан функционала энергии в критической точке* γ

$$H_\gamma E : T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

следующим образом. Для заданных векторных полей $W_1, W_2 \in T_\gamma\Omega$ строим двупараметрическую вариацию $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to \Omega$, удовлетворяющую

$$\overline{\sigma}(0,0) = \gamma, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(t; 0,0) = W_1(t), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(t; 0,0) = W_2(t),$$

и полагаем

$$(H_\gamma E)(W_1, W_2) = \frac{\partial^2 E(\overline{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1\,\partial u_2}\Big|_{(0,0)}. \tag{4.2}$$

Мы должны доказать, во-первых, корректность этого определения, т.е. что производная (4.2) зависит лишь от W_1, W_2, но не от выбора вариации σ; и во-вторых, что (4.1) есть симметричная билинейная форма. Все эти утверждения вытекают из следующей теоремы.

Теорема 4.1. (Формула второй вариации) *Пусть $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to \Omega$ — двупараметрическая вариация геодезической $\gamma : [0,1] \to M$, которой соответствуют векторные поля вариации*

$$W_i(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u_i}(t; 0,0) \in T_\gamma\Omega \quad (i = 1,2).$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E(\overline{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1\,\partial u_2}\Big|_{u_1=u_2=0} = -\sum_t \Big\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \Big\rangle - \int\limits_0^1 \Big\langle W_2, \frac{D^2W_1}{dt^2} + R(W_1, \dot\gamma)\dot\gamma \Big\rangle\, dt, \tag{4.3}$$

где

$$\Delta_t \frac{DW_1}{dt} = \frac{DW_1}{dt}(t+0) - \frac{DW_1}{dt}(t-0)$$

— скачок производной $\frac{DW_1}{dt}$ в одной из конечного числа ее точек разрыва в открытом интервале $(0,1)$.

Доказательство. Согласно формуле (3.5) предыдущего параграфа,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E(\overline{\sigma})}{\partial u_2} = -\sum_t \Big\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial\sigma}{\partial t} \Big\rangle - \int\limits_0^1 \Big\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t} \Big\rangle\, dt.$$

Дифференцируем это равенство по u_1

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\overline{\sigma})}{\partial u_1\,\partial u_2} = -\sum_t \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \Delta_t\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1}\Delta_t\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle$$

$$-\int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle dt.$$

Полагаем здесь $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Первое и третье слагаемые в правой части обратятся в нуль поскольку $\gamma = \overline{\sigma}(0, 0)$ — целая геодезическая. Операторы $\frac{D}{\partial u_1}$ и Δ_t во втором слагаемом, очевидно, перестановочны. Таким образом мы получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E(\overline{\sigma})}{\partial u_1\,\partial u_2}(0,0) = -\sum_t \left\langle W_2, \Delta_t\frac{DW_1}{dt}\right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right\rangle\bigg|_{u_1=u_2=0} dt, \qquad (4.4)$$

Чтобы переставить операторы $\frac{D}{\partial u_1}$ и $\frac{D}{\partial t}$ в подынтегральном выражении, воспользуемся леммой 4.1 главы 5, согласно которой

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = R\big(\frac{\partial\sigma}{\partial u_1}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\big)\frac{\partial\sigma}{\partial t}.$$

Полагая здесь $(u_1, u_2) = (0, 0)$ и используя равенство

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\bigg|_{u_1=u_2=0} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial u_1}\bigg|_{u_1=u_2=0} = \frac{DW_1}{dt},$$

получаем

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\bigg|_{u_1=u_2=0} = \frac{D^2W_1}{dt^2} + R(W_1, \dot{\gamma})\dot{\gamma}. \qquad (4.5)$$

Подставляя это выражение в (4.4), приходим к (4.3). □

Правая часть формулы (4.3) зависит лишь от W_1 и W_2, но не от вариации σ; причем зависимость от каждого из полей W_i $(i = 1, 2)$ — линейная. Тем самым мы убедились, что формула (4.2) корректно определяет билинейную форму (4.1). Свойство симметричности

$$(H_\gamma E)(W_1, W_2) = (H_\gamma E)(W_2, W_1)$$

вовсе не очевидно, если исходить из формулы второй вариации; но оно немедленно следует из симметричности $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$.

Продолжая аналогию с главой 3, вводим следующее

Определение 4.2. *Индексом геодезической $\gamma : [0, 1] \to M$ называется индекс ее гессиана, т.е. максимальная из размерностей подпространств $V \subset T_\gamma\Omega$, на которых гессиан отрицательно определен. Последнее означает, что*

$$(H_\gamma E)(W, W) < 0 \quad \textit{для всех} \quad 0 \neq W \in V.$$

Мы убедимся позднее, что индекс геодезической всегда конечен.

Заметим, что квадратичную форму, соответствующую гессиану $H_\gamma E$, можно описать в терминах однопараметрической вариации. Действительно,

$$(H_\gamma E)(W, W) = \frac{d^2 E(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\bigg|_{u=0},$$

где $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$ — вариация γ, для которой векторное поле вариации равно W. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь ввести двупараметрическую вариацию

$$\overline{\tau}(u_1, u_2) = \overline{\sigma}(u_1 + u_2)$$

и заметить, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 E(\overline{\tau}(u_1, u_2))}{du_1\, du_2}\bigg|_{u_1=u_2=0} = \frac{d^2 E(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\bigg|_{u=0}.$$

В качестве применения этого замечания докажем следующее

Предложение 4.3. *Если $\gamma : [0,1] \to M$ — кратчайшая геодезическая, соединяющая точки p и q, то квадратичная форма $H_\gamma E$ неотрицательна и, следовательно, индекс геодезической γ равен нулю.*

Доказательство. Из неравенства $E(\overline{\sigma}(u)) \ge E(\gamma) = E(\overline{\sigma}(0))$ вытекает, что

$$\frac{d^2 E(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\bigg|_{u=0} \ge 0$$

и, следовательно, $(H_\gamma E)(W, W) \ge 0$ для всех W. $\square$

Упражнения

1. Докажите, что формула второй вариации может быть записана в виде

$$\frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 E(\overline{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1\, \partial u_2}\bigg|_{u_1=u_2=0} = \int\limits_0^1 \left(\left\langle \frac{DW_1}{dt}, \frac{DW_2}{dt} \right\rangle - \langle R(W_1, \dot\gamma)\dot\gamma, W_2 \rangle \right) dt.$$

Указание: преобразуйте интеграл из правой части формулы (4.3) путем интегрирования по частям подобно тому, как мы поступили при выводе формулы первой вариации в предыдущем параграфе.

2. Докажите следующее обобщение формулы второй вариации. Пусть $\omega \in \Omega(M; p, q)$ и $\sigma : [0,1] \times (-\delta, \delta) \to M$ — вариация *со свободными концами* пути ω (т.е. не требуется, чтобы $\sigma(0, u) = p$ и $\sigma(1, u) = q$). Тогда

$$\frac{1}{2}\, \frac{d^2 E(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\bigg|_{u=0} = \langle V_1, \dot\omega(1) \rangle - \langle V_0, \dot\omega(0) \rangle + \int\limits_0^1 \left(\left\| \frac{DW}{dt} \right\|^2 - \langle R(W, \dot\gamma)\dot\gamma, W \rangle \right) dt,$$

где $W(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ и $V_0 = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(0, 0),\ V_1 = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, 0)$.

3. Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — геодезическая и $\sigma : [0,1] \times (-\delta, \delta) \to M$ — геодезическая вариация со свободными концами пути γ (см. определение в §4 главы 5). Тогда (докажите)

$$c\, \frac{d^2 L(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\bigg|_{u=0} = \langle V_1, \dot\gamma(1) \rangle - \langle V_0, \dot\gamma(0) \rangle + \left\langle J(1), \frac{DJ}{dt}(1) \right\rangle - \left\langle J(0), \frac{DJ}{dt}(0) \right\rangle - \frac{\alpha^2}{c^2},$$

где векторы V_0 и V_1 те же, что в предыдущем упражнении, $J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ — поле Якоби вдоль γ, а постоянные c и α определяются равенствами $c = \|\dot\gamma\|$ и $\left\langle \dot\gamma, \frac{DJ}{dt} \right\rangle = \alpha \|\dot\gamma\|^2$.

5. Нулевое пространство гессиана. Сопряженные точки

Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ — геодезическая в римановом многообразии. Точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ $(t_0, t_1 \in [a, b],\ t_0 \neq t_1)$ называются *сопряженными* вдоль γ, если существует ненулевое поле Якоби $J(t)$ вдоль γ, обращающееся в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$:

$$J(t_0) = 0, \quad J(t_1) = 0. \tag{5.1}$$

Размерность пространства таких полей Якоби называется *кратностью* сопряженных точек $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$.

Напомним, что размерность пространства всех полей Якоби вдоль γ равна $2n = 2 \dim M$. Первое из уравнений (5.1) выделяет n-мерное подпространство в пространстве всех полей Якоби. Тем самым кратность сопряженных точек не может превышать n. На самом деле эта кратность всегда не больше, чем $n - 1$. Действительно, поле Якоби $J(t) = (t - t_0)\dot{\gamma}(t)$ обращается в нуль при $t = t_0$ и отлично от нуля при остальных t.

Сопряженные точки тесно связаны с критическими точками экспоненциального отображения. Непосредственно из теоремы 4.4 главы 5 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X \in T_pM$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Вектор X является критической точкой отображения $\exp_p$ тогда и только тогда, когда точки $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_p(tX)$.*

Предположим для простоты, что риманово многообразие M полно, так что экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_pM \to M$$

определено на всем T_pM. Согласно теореме Сарда, множество критических значений этого отображения имеет меру нуль. Теорема 5.1 говорит, что точка q является критическим значением этого отображения тогда и только тогда, когда она сопряжена с p вдоль некоторой геодезической, соединяющей p и q. Таким образом получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть M — полное риманово многообразие и $p \in M$. Для почти всех точек $q \in M$ (т.е. для всех точек за исключением множества меры нуль) p и q не сопряжены ни вдоль какой соединяющей их геодезической.*

Возвращаемся к изучению функционала энергии $E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$ по аналогии с теорией Морса. Напомним, что в главе 3, определив гессиан

$$H_pf : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

в критической точке p функции $f : M \to \mathbb{R}$, мы затем определили нулевое пространство гессиана как множество векторов $X \in T_pM$, для которых $(H_pf)(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_pM$. Вполне аналогично вводим следующее определение.

Пусть $\gamma : [0, 1] \to M$ — геодезическая. *Нулевое пространство* гессиана

$$H_\gamma E : T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \to \mathbb{R}$$

состоит из тех векторных полей $W_1 \in T_\gamma\Omega$, для которых $(H_\gamma E)(W_1, W_2) = 0$ при всех $W_2 \in T_\gamma\Omega$. Размерность нулевого пространства называется *степенью вырождения* гессиана.

Теорема 5.3. *Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — геодезическая. Векторное поле $J \in T_\gamma\Omega$ принадлежит нулевому пространству гессиана $H_\gamma E$ тогда и только тогда, когда J есть поле Якоби вдоль γ. Гессиан $H_\gamma E$ вырожден тогда и только тогда, когда точки $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль γ. Степень вырождения гессиана равна кратности сопряженных точек p и q. В частности, степень вырождения гессиана всегда конечна.*

Доказательство. (Ср. с доказательством теоремы 3.2). Согласно формуле второй вариации

$$-\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J,W) = \sum_t \left\langle W(t), \Delta_t \frac{DJ}{dt} \right\rangle + \int_0^1 \left\langle W, \frac{D^2J}{dt^2} + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma \right\rangle dt, \tag{5.2}$$

Если $J(t)$ — поле Якоби, то правая часть этой формулы равна нулю для любого W. Следовательно, любое поле Якоби, удовлетворяющее $J(0) = 0$ и $J(1) = 0$, принадлежит нулевому пространству гессиана.

Обратно, пусть векторное поле $J \in T_\gamma\Omega$ принадлежит нулевому пространству гессиана, т.е. правая часть формулы (5.2) равна нулю для любого $W \in T_\gamma\Omega$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ — такое разбиение отрезка $[0,1]$, что ограничение $J|_{[t_{i-1},t_i]}$ гладко при каждом $1 \le i \le k$. Выберем гладкую функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, обращающуюся в нуль в всех точках t_i и положительную между этими точками, и положим

$$W(t) = f(t)\left(\frac{D^2J}{dt^2} + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma\right).$$

Подставив это выражение в (5.2), получим

$$0 = -\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J,W) = \sum_t 0 + \int_0^1 f(t)\left\|\frac{D^2J}{dt^2} + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma\right\|^2 dt.$$

В силу положительности f отсюда следует, что $J|_{[t_{i-1},t_i]}$ — поле Якоби при каждом $1 \le i \le k$.

Выберем теперь такое $W \in T_\gamma\Omega$, что $W(t_i) = \Delta_{t_i}\frac{DJ}{dt}$ при каждом $1 \le i \le k-1$. Тогда

$$0 = -\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J,W) = \sum_{i=1}^{k-1}\left\|\Delta_{t_i}\frac{DJ}{dt}\right\|^2.$$

Отсюда следует, что $\frac{DJ}{dt}$ не имеет скачков, т.е. поле $J(t)$ принадлежит классу C^1. А поскольку оно удовлетворяет уравнению Якоби на каждом отрезке $[t_{i-1},t_i]$, то оно принадлежит классу C^∞ и является полем Якоби на всем $[0,1]$.

Заметим, наконец, что условия $J(0) = 0$ и $J(1) = 0$ следуют из предположения $J \in T_\gamma\Omega$ поскольку $T_\gamma\Omega$ состоит из векторных полей, обращающихся в нуль в концах γ. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Оно очевидным образом влечет остальные утверждения. □

В заключение параграфа рассмотрим два примера.

Пример 1. Риманово многообразие называется *плоским*, если его тензор кривизны тождественно равен нулю. Примерами плоских многообразий является $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой и круглый цилиндр, рассмотренный в §3 предыдущей главы. Для плоского многообразия уравнение Якоби приобретает вид $\frac{D^2J}{dt^2} = 0$. Если $J = J^i e_i$, где $(e_1(t),\dots,e_n(t))$ — параллельный вдоль геодезической $\gamma(t)$ базис пространства

$T_{\gamma(t)}M$, то $\frac{d^2J^i}{dt^2}=0$. Очевидно, поле Якоби вдоль γ не может иметь более одного нуля. Следовательно, сопряженных точек нет и гессиан $H_\gamma E$ невырожден для любой геодезической γ.

Пример 2. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ единичного радиуса со стандартной метрикой, индуцированной евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. конец 5-го параграфа предыдущей главы). Пусть p и q — две противоположные точки сферы $\mathbb{S}^n$ и γ — соединяющая их дуга большого круга. Мы увидим, что p и q — сопряженные точки кратности $n-1$ вдоль γ. Следовательно, степень вырождения гессиана принимает в данном случае максимально возможное значение. Предварительно обсудим одну конструкцию, справедливую в общем случае.

Пусть M — риманово многообразие и $\varphi_u : M\to M$ — семейство его изометрий, гладко зависящее от параметра $u\in(-\delta,\delta)$ и такое, что φ_0 есть тождественное отображение. Для геодезической $\gamma:[0,1]\to M$ кривая $\gamma_u:[0,1]\to M,\ \gamma_u(t)=\varphi_u(\gamma(t))$ также является геодезической поскольку изометрия переводит геодезические в геодезические. Следовательно, отображение

$$\sigma:[0,1]\times(-\delta,\delta)\to M,\quad \sigma(t,u)=\varphi_u(\gamma(t))$$

есть геодезическая вариация геодезической γ. Согласно теореме 4.2 предыдущей главы, векторное поле

$$J(t)=\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)=\left.\frac{\partial\big(\varphi_u(\gamma(t))\big)}{\partial u}\right|_{u=0}$$

является полем Якоби вдоль γ. Эта конструкция позволяет находить многие интересные решения уравнения Якоби в случае риманова многообразия с достаточно богатой группой изометрий. Если, в частности, мы ищем поле Якоби вдоль γ, обращающееся в нуль в концевых точках $p=\gamma(0)$ и $q=\gamma(1)$, то надо рассматривать те семейства изометрий φ_u, для которых p и q являются неподвижными точками, т.е. $\varphi_u(p)=p$ и $\varphi_u(q)=q$ при всех u.

Возвращаемся к нашему примеру. Пусть p и q — две противоположные точки сферы $\mathbb{S}^n$ и γ — соединяющая их дуга большого круга. Легко видеть, что существуют $n-1$ линейно независимых вращений сферы, оставляющих p и q неподвижными. Применяя приведенную конструкцию, получаем $n-1$ линейно независимых полей Якоби вдоль γ, обращающихся в нуль в точках p и q (см. Рис. 2). Следовательно, p и q сопряжены вдоль γ с кратностью $n-1$.

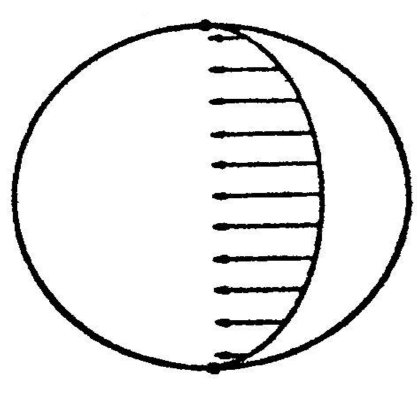

Рис. 2

Сопряженность диаметрально противоположных точек сферы тесно связана со следующим обстоятельством. Для любой точки $p \in \mathbb{S}^n$ экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_p\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$

отображает шар $B_\pi = \{X \in T_p\mathbb{S}^n \mid \|X\| < \pi\}$ диффеоморфно на $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$, где q — диаметрально противоположная для p точка. Что же касается граничной сферы $\{X \in T_p\mathbb{S}^n \mid \|X\| = \pi\}$ этого шара, $\exp_p$ отображает эту сферу целиком в точку q.

Упражнения

1. Докажите, что точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ $(t_0, t_1 \in [a,b],\ t_0 \neq t_1)$ не сопряжены вдоль геодезической $\gamma : [a,b] \to M$ тогда и только тогда, когда краевая задача для уравнения Якоби

$$J(t_0) = J_0, \quad J(t_1) = J_1$$

имеет единственное решение для любых $J_0 \in T_{\gamma(0)}M$ и $J_1 \in T_{\gamma(1)}M$.

2. Пусть p и q — две точки (не обязательно различные) полного риманова многообразия M. Пользуясь теоремой 4.4 предыдущей главы, докажите следующее утверждение. Точки p и q сопряжены вдоль некоторой соединяющей их геодезической тогда и только тогда, когда q есть критическое значение экспоненциального отображения $\exp_p : T_pM \to M$. Более того, если $X \in T_pM$ — критическая точка этого отображения, то размерность нулевого пространства дифференциала

$$d_X \exp_p : T_pM \to T_{\exp_p(X)}M$$

равна кратности, с которой точки p и $q = \exp_p(X)$ сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ $(0 \le t \le 1)$.

3. Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ — геодезическая длины $k\pi$ на сфере единичного радиуса, где k — положительное целое число. Обратим внимание, что γ замкнута при четном k. Докажите, что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ сопряжены вдоль γ с кратностью $n-1$.

4. Докажите, что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ не сопряжены вдоль геодезической $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$, если длина γ не равна $k\pi$ для целого положительного k.

6. Теорема об индексе

Напомним, что для геодезической $\gamma : [0,1] \to M$ мы определили индекс гессиана

$$H_\gamma E : T_\gamma\Omega \times T_\gamma\Omega \to \mathbb{R}$$

как максимальную из размерностей подпространств в $T_\gamma\Omega$, на которых гессиан отрицательно определен. Его часто называют также индексом геодезической γ. Следующая важная теорема принадлежит Морсу.

Теорема 6.1. *Для геодезической $\gamma : [0,1] \to M$ индекс λ гессиана $H_\gamma E$ равен числу точек $\gamma(t)$, где $0 < t < 1$, таких, что $\gamma(t)$ сопряжена с $\gamma(0)$ вдоль γ, если считать каждую сопряженную точку столько раз, какова ее кратность. Индекс λ всегда конечен.*

Отсюда немедленно вытекает

Следствие 6.2. *Геодезическая $\gamma : [a,b] \to M$ может содержать лишь конечное число точек, сопряженных с $\gamma(0)$ вдоль γ.*

Для доказательства теоремы 6.1 мы сначала оценим λ, разложив векторное пространство $T_\gamma\Omega$ в ортогональную сумму двух подпространств, на одном из которых гессиан положительно определен, а второе конечномерно.

Каждая точка $\gamma(t)$ имеет такую окрестность U, что любые две точки из U соединяет единственная кратчайшая геодезическая, гладко зависящая от своих концов (см. следствие 5.4 предыдущей главы). Выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ настолько мелким, чтобы каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ лежал в таком множестве U; тогда каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ $(1 \le i \le k)$ является кратчайшей.

Обозначим через $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \subset T_\gamma\Omega$ подпространство, состоящее из всех векторных полей $W(t)$ вдоль γ, таких, что

(1) $W|_{[t_{i-1},t_i]}$ — поле Якоби вдоль $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ для всех $1 \le i \le k$;

(2) $W(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ и $t = 1$.

Итак, $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ — конечномерное векторное пространство, состоящее из ломаных полей Якоби вдоль γ. Пусть $T' \subset T_\gamma\Omega$ — подпространство, состоящее из всех векторных полей $W \in T_\gamma\Omega$, удовлетворяющих $W(t_i) = 0$ при всех $1 \le i \le k$.

Лемма 6.3. *Векторное пространство $T_\gamma\Omega$ разлагается в прямую сумму*

$$T_\gamma\Omega = T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \oplus T'.$$

Эти два подпространства взаимно ортогональны относительно билинейной формы $H_\gamma E$. Кроме того, ограничение $H_\gamma E$ на T' положительно определено.

Доказательство. Пусть дано векторное поле $W \in T_\gamma\Omega$. Обозначим через W_1 то единственное “ломаное якобиево поле” из $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$, для которого $W_1(t_i) = W(t_i)$ при всех $0 \le i \le k$. Из замечания 4.3 предыдущей главы следует, что W_1 существует и единственно. Очевидно, $W - W_1$ принадлежит T'. Итак, два подпространства $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ и T' порождают $T_\gamma\Omega$ и имеют нулевое пересечение.

Если $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ и $W_2 \in T'$, то формула второй вариации дает

$$\frac{1}{2}(H_\gamma E)(W_1, W_2) = -\sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int\limits_0^1 \langle W_2, 0\rangle \, dt = 0.$$

Итак, наши подпространства взаимно ортогональны относительно гессиана.

При любом $W \in T_\gamma\Omega$ гессиан $(H_\gamma E)(W, W)$ можно интерпретировать как вторую производную $\frac{D^2(E(\overline{\sigma}(u)))}{du^2}\Big|_0$, где $\overline{\sigma} : (-\delta, \delta) \to \Omega$ — вариация геодезической γ с векторным полем вариации, равным W (ср. с замечанием, приведенным после определения 4.2). Если W принадлежит T', то мы можем считать, что $\overline{\sigma}$ оставляет каждую из точек $\gamma(t_i)$ неподвижной, т.е $\sigma(t_i, u) = \gamma(t_i)$ $(0 \le i \le k)$.

Докажем, что $(H_\gamma E)(W, W) \ge 0$ при $W \in T'$. Пусть вариация σ выбрана как в предыдущем абзаце. Тогда $\overline{\sigma}(u)$ есть кусочно-гладкий путь из $\gamma(0)$ в $\gamma(t_1)$, затем из $\gamma(t_1)$ в $\gamma(t_2)$, ..., из $\gamma(t_{k-1})$ в $\gamma(1)$. Но каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ является кратчайшим, и поэтому имеет меньшую энергию, чем любой другой путь с теми же концами. Это доказывает неравенство

$$E(\overline{\sigma}(u)) \ge E(\gamma) = E(\overline{\sigma}(0)).$$

Следовательно, $\frac{D^2(E(\overline{\sigma}(u)))}{du^2}\Big|_0 \ge 0$.

Докажем, что $(H_\gamma E)(W, W) > 0$ при $W \in T'$, $W \ne 0$. Предположим, что $(H_\gamma E)(W, W) = 0$ и убедимся, что W лежит в нулевом пространстве гессиана. В самом деле, мы уже видели, что $(H_\gamma E)(W_1, W) = 0$ для любого $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$. При любом

$W_2 \in T'$ из неравенства

$$0 \le (H_\gamma E)(W + cW_2, W + cW_2) = 2c(H_\gamma E)(W_2, W) + c^2(H_\gamma E)(W_2, W_2),$$

справедливого при всех c, вытекает, что $(H_\gamma E)(W_2, W) = 0$. Итак, W принадлежит нулевому пространству гессиана. Но нулевое пространство состоит из якобиевых полей. Так как T' не содержит якобиевых полей, отличных от нулевого, получаем, что $W = 0$. $\square$

Из леммы 6.3 немедленно следует

Лемма 6.4. *Индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E$ равен индексу (или степени вырождения) ограничения $H_\gamma E$ на подпространство $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ломаных якобиевых полей. В частности, этот индекс всегда конечен (поскольку пространство $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ конечномерно).*

Перейдем к доказательству теоремы 6.1, которое будет разбито на несколько вспомогательных утверждений. Для $\tau \in [0, 1]$ пусть γ_τ — ограничение геодезической γ на отрезок $[0, \tau]$. Обозначим через $\lambda(\tau)$ индекс гессиана $H_{\gamma_\tau} E$, связанного с этой геодезической. Тогда $\lambda(1)$ — индекс, который мы стараемся подсчитать.

Утверждение 1. *$\lambda(\tau)$ — монотонная функция τ.*

В самом деле, если $\tau < \tau'$, то существует $\lambda(\tau)$-мерное пространство $\mathcal{W}$ векторных полей вдоль γ_τ, обращающихся в нуль в $\gamma(0)$ и $\gamma(\tau)$ и таких, что гессиан $H_{\gamma_\tau} E$ отрицательно определен на $\mathcal{W}$. Каждое векторное поле из $\mathcal{W}$ продолжается до векторного поля вдоль $\gamma_{\tau'}$, тождественно равного нулю между $\gamma(\tau)$ и $\gamma(\tau')$. Итак, мы получили $\lambda(\tau)$-мерное пространство полей вдоль $\gamma_{\tau'}$, на котором гессиан $H_{\gamma_{\tau'}} E$ отрицательно определен. Поэтому $\lambda(\tau) \le \lambda(\tau')$.

Утверждение 2. *$\lambda(\tau) = 0$ при малых τ.*

В самом деле, если τ достаточно мало, то γ_τ — кратчайшая геодезическая, поэтому $\lambda(\tau) = 0$, согласно предложению 4.3.

Исследуем теперь разрывы функции $\lambda(\tau)$. Заметим сначала, что эта функция непрерывна слева.

Утверждение 3. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$.*

Доказательство. В соответствии с леммой 6.4, число $\lambda(1)$ можно рассматривать как индекс гессиана на конечномерном векторном пространстве $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$. Мы можем считать, что разбиение выбрано так, что $t_i < \tau < t_{i+1}$. Тогда индекс $\lambda(\tau)$ можно рассматривать как индекс соответствующей квадратичной формы H_τ на векторном пространстве ломаных якобиевых полей вдоль γ_τ, определенном посредством разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t'_{i+1} = \tau$ отрезка $[0, \tau]$. Так как такое ломаное поле Якоби однозначно определяется своими значениями в точках $\gamma(t_j)$ $(1 \le j \le i)$, это пространство изоморфно прямой сумме

$$\Sigma = T_{\gamma(t_1)} \oplus T_{\gamma(t_2)} \oplus \dots \oplus T_{\gamma(t_i)}.$$

Заметим, что это векторное пространство Σ не зависит от τ. Очевидно, что квадратичная форма H_τ на Σ непрерывно зависит от τ.

Форма H_τ отрицательно определена на некотором $\lambda(\tau)$-мерном подпространстве $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Следовательно, при всех τ', достаточно близких к τ, форма $H_{\tau'}$ отрицательно определена на $\mathcal{W}$. Поэтому $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$. Но если $\tau' = \tau - \varepsilon < \tau$, то, согласно утверждению (1), имеем также $\lambda(\tau - \varepsilon) \leq \lambda(\tau)$. Итак, $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$. □

Утверждение 4. *Пусть ν — степень вырождения гессиана $H_{\gamma_\tau} E$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

Итак, целочисленная функция $\lambda(\tau)$ испытывает скачок ν, когда переменная τ проходит через сопряженную точку кратности ν, и непрерывна в остальных точках. Очевидно, отсюда следует утверждение теоремы 6.1.

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$. Пусть H_τ и Σ — те же, что и в доказательстве утверждения (3). Так как $\dim \Sigma = ni$, то H_τ положительно определена на некотором подпространстве $\mathcal{W}' \subset \Sigma$ размерности $ni - \lambda(\tau) - \nu$. При всех τ', достаточно близких к τ, форма $H_{\tau'}$ положительно определена на $\mathcal{W}'$. Поэтому

$$\lambda(\tau') \leq \dim \Sigma - \dim \mathcal{W}' \leq \lambda(\tau) + \nu.$$

Теперь доказываем противоположное неравенство $\lambda(\tau+\varepsilon) \geq \lambda(\tau)+\nu$. Выберем $\lambda(\tau)$ векторных полей $W_1, \ldots, W_{\lambda(\tau)}$ вдоль γ_τ, равных нулю в концевых точках и таких, что матрица

$$\big((H_{\gamma_\tau} E)(W_i, W_j)\big)$$

отрицательно определена. Выберем также ν линейно независимых якобиевых полей $J_1, \ldots, J_\nu$ вдоль γ_τ, также равных нулю в концевых точках. Заметим, что ν векторов

$$\frac{DJ_h}{dt}(\tau) \in T_{\gamma(\tau)} M \quad (1 \leq h \leq \nu)$$

линейно независимы. Поэтому можно выбрать ν векторных полей $X_1, \ldots, X_\nu$ вдоль $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ так, чтобы матрица

$$\left(\left\langle \frac{DJ_h}{dt}(\tau), X_k(\tau) \right\rangle\right)$$

равнялась единичной $\nu \times \nu$-матрице. Продолжим векторные поля W_i и J_h на $\gamma_{\tau+\varepsilon}$, полагая их равными нулю при $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$.

С помощью формулы второй вариации мы легко убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} &(H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E)(J_h, W_i) = 0, \\ &(H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E)(J_h, X_k) = 2\delta_{hk} \quad (\delta_{hk} \text{ — символ Кронекера}). \end{aligned}$$

Пусть теперь c — некоторое малое положительное число. Рассмотрим $\lambda(\tau) + \nu$ векторных полей

$$W_1, \ldots, W_{\lambda(\tau)},\ c^{-1}J_1 - cX_1, \ldots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu$$

вдоль $\gamma_{\tau+\varepsilon}$. Мы утверждаем, что эти поля порождают векторное пространство размерности $\lambda(\tau)+\nu$, на котором квадратичная форма $H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E$ отрицательно определена. Действительно, матрица $H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \big((H_{\gamma_\tau} E)(W_i, W_j)\big) & cA \\ cA^t & -4I + c^2 B \end{pmatrix},$$

где A и B — фиксированные матрицы. Если c достаточно мало, то эта составная матрица отрицательно определена. □

Упражнение

После первой сопряженной точки геодезическая перестает быть кратчайшей. Точнее (докажите): Если $\gamma : [a,b] \to M$ — геодезическая и для некоторого $t_0 \in (a,b)$ точки $\gamma(a)$ и $\gamma(t_0)$ сопряжены вдоль γ, то γ не является кратчайшей. Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. геодезическая без сопряженных точек может не быть кратчайшей. Примеры такого рода геодезических дает круглый цилиндр, рассмотренный в §3 предыдущей главы. Далеко не всякая геодезическая на этом цилиндре является кратчайшей. С другой стороны, сопряженные точки отсутствуют, поскольку тензор кривизны этого цилиндра тождественно равен нулю.

7. Конечномерная аппроксимация множества Ω^a

В этом параграфе предполагаем, что M — связное риманово многообразие. Напомним, что определено расстояние $\rho(p,q)$ между точками $p,q \in M$.

До сих пор множество $\Omega = \Omega(M;p,q)$ рассматривалось без топологии. Введем теперь *расстояние* $d(\omega,\omega')$ между двумя путями $\omega,\omega' \in \Omega$ с длинами дуг соответственно $s(t)$ и $s'(t)$ формулой

$$d(\omega,\omega') = \max_{0\le t\le 1} \rho(\omega(t),\omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}\right)^2 dt\right]^{1/2}.$$

Второе слагаемое добавлено для того, чтобы функционал энергии $E : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$E(\omega) = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt$$

был непрерывным на Ω. Это расстояние определяет топологию на Ω.

Напомним, что при изучении теории Морса в главе 3 мы для функции $f : M \to \mathbb{R}$ ввели множество $M^a = \{p \in M \mid f(p) \le a\}$ и следили за изменением топологии этого множества при возрастании a. Применим ту же стратегию к изучению функционала энергии.

Для положительного числа a обозначим через Ω^a замкнутое множество $E^{-1}([0,a]) \subset \Omega$ и через $\operatorname{Int}\Omega^a$ — открытое множество $E^{-1}([0,a))$. В отличие от главы 3, Ω^a и $\operatorname{Int}\Omega^a$ являются “бесконечномерными многообразиями”. Мы построим конечномерную аппроксимацию для них.

Зафиксируем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0,1]$. Обозначим через $\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)$ подпространство в Ω, состоящее из таких путей $\omega : [0,1] \to M$, что

(1) $\omega(0) = p$ и $\omega(1) = q$;

(2) $\omega_{[t_{i-1},t_i]}$ есть геодезическая при всех $1 \le i \le k$.

Итак, $\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)$ состоит из всех ломаных геодезических, идущих из p в q, с изломами в точках предписанного разбиения. Введем также следующие подмножества топологического пространства Ω:

$$\Omega^a(t_0,t_1,\dots,t_k) = \Omega^a \cap \Omega(t_0,t_1,\dots,t_k),$$
$$\operatorname{Int}\Omega^a(t_0,t_1,\dots,t_k) = (\operatorname{Int}\Omega^a) \cap \Omega(t_0,t_1,\dots,t_k).$$

Лемма 7.1. *Пусть M — полное риманово многообразие и a — положительное число, для которого $\Omega^a \ne \emptyset$. Тогда для любого достаточно мелкого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0,1]$ пространство $\operatorname{Int}\Omega^a(t_0,t_1,\dots,t_k)$ можно естественным образом снабдить структурой гладкого конечномерного многообразия.*

Доказательство. Замкнутый шар

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\sqrt{a}}(p) = \{x \in M \mid \rho(x,p) \leq \sqrt{a}\} \subset M$$

компактен поскольку M полно. Каждый путь $\omega \in \Omega^a$ лежит в этом шаре, как видно из неравенств $L^2(\omega) \leq E(\omega) \leq a$. Согласно следствию 5.4 главы 5, существует такое $\varepsilon > 0$, что если $x, y \in \mathbb{D}_{\sqrt{a}}(p)$ и $\rho(x,y) < \varepsilon$, то имеется лишь одна геодезическая из x в y длины меньше $\varepsilon > 0$ и эта геодезическая гладко зависит от x и y.

Пусть разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ отрезка $[0,1]$ удовлетворяет $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$ $(1 \leq i \leq k)$. Тогда для любой ломаной геодезической $\omega \in \Omega^a(t_0, t_1, \ldots, t_k)$

$$\left(L_{t_{i-1}}^{t_i}\omega\right)^2 = (t_i - t_{i-1})E_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega) \leq (t_i - t_{i-1})E(\omega) \leq (t_i - t_{i-1})a < \varepsilon^2.$$

Следовательно, каждое звено $\omega|_{[t_{i-1},t_i]}$ ломаной геодезической ω однозначно и дифференцируемо определяется своими концами.

Сама ломаная геодезическая ω однозначно и дифференцируемо определяется набором точек

$$(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k-1})) \in \underbrace{M \times \cdots \times M}_{k-1}.$$

Очевидно, что отображение $\omega \mapsto (\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k-1}))$ является гомеоморфизмом пространства $\operatorname{Int}\Omega^a(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ на некоторое открытое множество в $(k-1)$-кратном произведении $M \times \cdots \times M$. Перенося гладкую структуру с этого произведения, получаем утверждение леммы. $\square$

Зафиксируем разбиение $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$, для которого справедливо утверждение леммы 7.1, и для сокращения дальнейших формул обозначим через B многообразие $\operatorname{Int}\Omega^a(t_0, t_1, \ldots, t_k)$. Пусть

$$E' : B \to \mathbb{R}$$

— ограничение функционала E на это многообразие.

Теорема 7.2. *Функция $E' : B \to \mathbb{R}$ — гладкая. При каждом $b < a$ множество $B^b = E'^{-1}([0,b])$ компактно и является деформационным ретрактом множества Ω^b. Критические точки функции E' совпадают с критическими точками функционала E в $\operatorname{Int}\Omega^a$; это целые геодезические из p в q длины, меньшей $\sqrt{a}$. Индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ в каждой такой критической точке γ равен индексу (или степени вырождения) гессиана $H_\gamma E'$. Само B также является деформационным ретрактом множества Ω^a.*

Итак, пара (B, E') является точной конечномерной моделью бесконечномерной пары $(\operatorname{Int}\Omega^a, E)$.

Доказательство. Так как ломаная геодезическая $\omega \in B$ гладко зависит от набора $(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_{k-1})) \in M \times \cdots \times M$, то энергия $E'(\omega)$ также гладко зависит от этого набора. В действительности справедлива явная формула

$$E'(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho^2(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))}{t_i - t_{i-1}}.$$

При $b < a$ множество B^b гомеоморфно множеству всех наборов $(p_1, \ldots, p_{k-1}) \in \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho^2(p_{i-1}, p_i)}{t_i - t_{i-1}} \leq b$$

(подразумевается, что $p_0 = p,\ p_k = q$). Как замкнутое подмножество компактного множества, B^b компактно.

Ретракцию

$$r : \operatorname{Int}\Omega^a \to B$$

определим так. Пусть $r(\omega)$ — единственная ломаная геодезическая из B, такая, что каждое звено $r(\omega)|_{[t_{i-1},t_i]}$ есть геодезическая длины меньше ε, идущая из $\omega(t_{i-1})$ в $\omega(t_i)$. Из неравенств

$$\rho^2(p,\omega(t) \le L^2(\omega) \le E(\omega) < b$$

вытекает, что $\omega[0,1] \subset \mathbb{D}$. Поэтому из неравенств

$$\rho^2(\omega(t_{i-1}),\omega(t_i)) \le (t_i - t_{i-1})\Big(E_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega)\Big) < \frac{\varepsilon^2}{b} \cdot b = \varepsilon^2$$

следует, что $r(\omega)$ существует.

Очевидно, что $E(r(\omega)) \le E(\omega) < a$. Ретракция r включается в однопараметрическое семейство отображений

$$r_u : \operatorname{Int}\Omega^a \to \operatorname{Int}\Omega^a \quad (0 \le u \le 1)$$

следующим образом. При $t_{i-1} \le u \le t_i$ пусть

$$\begin{cases} r_u(\omega)|_{[0,t_{i-1}]} = r(\omega)|_{[0,t_{i-1}]}; \\ r_u(\omega)|_{[t_{i-1},u]} \ \text{— кратчайшая геодезическая из } \omega(t_{i-1}) \text{ в } \omega(u); \\ r_u(\omega)|_{[u,1]} = \omega|_{[u,1]}. \end{cases}$$

Тогда r_0 — тождественное отображение и $r_1 = r$. Легко видеть, что $r_u(\omega)$ непрерывно зависит от (ω, u). Это доказывает, что B есть деформационный ретракт множества $\operatorname{Int}\Omega^a$.

(Построенная гомотопия r_u между тождественным отображением и r называется *деформацией Морса*, она часто используется в римановой геометрии. Деформация Морса имеет наглядный геометрический смысл: на части $[u,1]$ отрезка $[0,1]$ путь $r_u(\omega)$ совпадает с ω; в то время как на части $[0,u]$ отрезка $[0,1]$ путь $r_u(\omega)$ есть ломаная геодезическая с изломами в точках $t_1,\dots,t_{i-1} \le u$.)

Так как $E(r_u(\omega)) \le E(\omega)$, ясно, что каждое B^b есть деформационный ретракт множества Ω^b.

Каждая геодезическая является также и ломаной геодезической, поэтому ясно, что каждая критическая точка функционала энергии в $\operatorname{Int}\Omega^a$ принадлежит многообразию B. Из формулы первой вариации следует, что критическими точками функции E' являются целые геодезические и только они.

Рассмотрим касательное пространство $T_\gamma B$ к многообразию B в геодезической γ. Оно может быть отождествлено с пространством $T_\gamma\Omega(t_0,t_1,\dots,t_k)$ ломаных полей Якоби вдоль γ, введенному в предыдущем параграфе. Это отождествление устанавливается следующим образом. Пусть

$$\overline{\sigma} : (-\delta,\delta) \to B$$

— вариация γ в ломаные геодезические. Тогда соответствующее векторное поле вариации $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$ есть ломаное поле Якоби вдоль γ (ср. с теоремой 4.2 главы 5).

Теперь утверждение о том, что индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ равен индексу (или степени вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ немедленно следует из леммы 6.4. $\square$

8. Топология пространства путей

Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Выберем такое $a > 0$, что $\Omega^a \neq \emptyset$. Согласно теореме 7.2, множество Ω^a имеет тот же гомотопический тип, что и конечномерное многообразие $B = \operatorname{Int} \Omega^a(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ для достаточно мелкого разбиения отрезка $[0, 1]$. Согласно той же теореме 7.2, $E' : B \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, такая, что каждое множество $E'^{-1}[0, b]$ $(b < a)$ компактно и критические точки индекса λ этой функции совпадают с целыми геодезическими $\gamma \in B$ индекса λ. Заметим также, что все критические точки функции E' невырождены, т.е. $E' : B \to \mathbb{R}$ есть функция Морса. Действительно, согласно тереме 5.1, геодезическая γ является вырожденной критической точкой тогда и только тогда, когда $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль γ; а мы предположили, что p и q не сопряжены ни вдоль какой геодезической.

Убедимся, наконец, что функция $E' : B \to \mathbb{R}$ имеет конечное число критических точек, т.е. что имеется лишь конечное число геодезических $\gamma : [0, 1] \to M$, удовлетворяющих $\gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q$ и $E(\gamma) < a$. Длина такой геодезической не превосходит $c = \sqrt{a}$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 8.1. *Пусть p и q — две точки полного риманова многообразия M, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Для любого положительного числа c имеется лишь конечное множество геодезических из p в q длины, не превосходящей c.*

Доказательство. Экспоненциальное отображение $\exp_p$ не имеет критических точек (ср. с доказательством теоремы 5.2). Согласно теореме об обратной функции, для любого $X \in (\exp_p)^{-1}(q)$ найдется окрестность $U \subset T_pM$, которую $\exp_p$ отображает диффеоморфно на некоторую окрестность точки q. В частности, множество $(\exp_p)^{-1}(q) \subset T_pM$ дискретно (т.е. любая точка этого множества имеет окрестность, не содержащую других точек этого множества). Пересечение этого дискретного множества с компактным шаром $\{X \in T_pM \mid \|X\| \leq c\}$ конечно.

□

Вернемся к ситуации, рассмотренной перед леммой 8.1. Мы убедились, что функция E' на конечномерном многообразии B является функцией Морса с конечным числом критических точек, причем $E' < a$ и множество $E'^{-1}[0, b]$ компактно для любого $b < a$. Применяя теорему 5.2 главы 3, получаем

Теорема 8.2. *Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Тогда для любого $a > 0$ множество*

$$\Omega^a = \{\omega \in \Omega(M; p, q) \mid E(\omega) \leq a\}$$

имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса, в котором каждой геодезической γ, соединяющей p и q и удовлетворяющей $E(\gamma) \leq a$, соответствует одна клетка, размерность которой равна индексу гессиана $H_\gamma E$.

Мы собираемся из теоремы 8.2 вывести заключение о гомотопическом типе пространства $\Omega(M; p, q)$ всех путей. Для этого необходимо понятие бесконечного клеточного комплекса поскольку во многих случаях две точки $p, q \in M$ соединяются бесконечным числом геодезических. Между тем в параграфах 8–9 главы 1 рассматривались лишь конечные клеточные комплексы. Поэтому мы сделаем небольшое отступление, чтобы ввести определение бесконечных клеточных комплексов и перечислить их основные гомотопические свойства. Подробное изложение этого предмета приведено в главе 3 книги [3].

Пусть имеется последовательность конечных клеточных комплексов, вложенных друг в друга

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \ldots . \tag{8.1}$$

Введем в объединении $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ топологию, объявив множество $U \subset K$ открытым, если для каждого n множество $U \cap K_n$ открыто в K_n. Это — так называемая *предельная* топология. Любое топологическое пространство K, которое можно получить таким образом, назовем (*бесконечным*) *полиэдром*, а саму последовательность (8.1) назовем (*бесконечным*) *клеточным комплексом*, реализующим полиэдр K. Все утверждения из параграфа 9 главы 1 переносятся на бесконечные клеточные комплексы. Единственным трудным местом в таком перенесении является следующее утверждение, известное как *теорема Уайтхеда.*

Пусть имеются две последовательности конечных клеточных комплексов, связанные цепочкой непрерывных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1 & \subset & K_2 & \subset & \ldots & \subset & K_n & \subset & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ K'_1 & \subset & K'_2 & \subset & \ldots & \subset & K'_n & \subset & \ldots \end{array} .$$

Если каждая из вертикальных стрелок является гомотопической эквивалентностью и каждый квадрат этой диаграммы коммутативен, то предельное отображение $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \to K' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K'_n$ *также есть гомотопическая эквивалентность.*

Доказательство этой теоремы не приводится поскольку оно требует привлечения аппарата гомотопической топологии, выходящего за пределы нашего курса; см. главу 3 книги [3].

Теорема 8.3. (Основная теорема теории Морса) *Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Тогда $\Omega(M; p, q)$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса, в котором каждой геодезической из p в q с индексом λ соответствует одна клетка размерности λ.*

Доказательство. Выберем последовательность $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ действительных чисел, которые не являются критическими значениями функционала энергии E, так что каждый интервал (a_{i-1}, a_i) содержит в точности одно критическое значение. Рассмотрим последовательность

$$\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \ldots , \tag{8.2}$$

где мы можем считать, что Ω^{a_0} пусто. Из теоремы 8.2 и леммы 9.5 главы 1 следует, что каждое Ω^{a_i} имеет гомотопический тип $\Omega^{a_{i-1}}$ с конечным числом приклеенных клеток, по одной клетке размерности λ на каждую геодезическую индекса λ из $E^{-1}(a_{i-1}, a_i)$ (см. также замечание в конце §4 главы 3). Теперь, как в доказательстве теоремы 5.2 главы 3, строим последовательность $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ конечных клеточных комплексов, клетки которых описаны выше, и последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{a_0} & \subset & \Omega^{a_1} & \subset & \Omega^{a_2} & \subset & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \subset & K_1 & \subset & K_2 & \subset & \ldots \end{array}$$

гомотопических эквивалентностей. Согласно лемме 9.5 главы 1, мы можем считать, что каждая гомотопическая эквивалентность, представленная на диаграмме вертикальной стрелкой, является продолжением отображения, представленного предыдущей вертикальной стрелкой; т.е. что диаграмма коммутативна. Обозначим через Ω^* множество $\Omega = \Omega(M; p, q)$, снабженное предельной топологией последовательности (8.2). Эта предельная топология не совпадает с введенной в §7 топологией на пространстве путей Ω. Однако, можно доказать, что тождественное отображение $\Omega \to \Omega^*$ есть гомотопическая эквивалентность; мы не приводим здесь это доказательство. Согласно теореме Уайтхеда, $\Omega(M; p, q) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Omega^{a_i}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса $K = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} K_i$.

□

Пример. *Пространство путей сферы* $\mathbb{S}^n$. Выберем точки $p, q \in \mathbb{S}^n$ как указано на Рис. 3 и обозначим через p' и q' диаметрально противоположные точки. Тогда имеется счетное число $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ геодезических, соединяющих p с q. А именно, γ_0 — кратчайшая дуга pq большого круга; γ_1 — дуга $pq'p'q$ большого круга; γ_2 — дуга $pqp'q'pq$ и т.д. Номер k указывает, сколько раз p или p' встречается внутри геодезической γ_k. Индекс геодезической γ_k равен $k(n-1)$, так как каждая внутренняя точка p или p' сопряжена с начальной точкой p с кратностью $n-1$. Таким образом получается

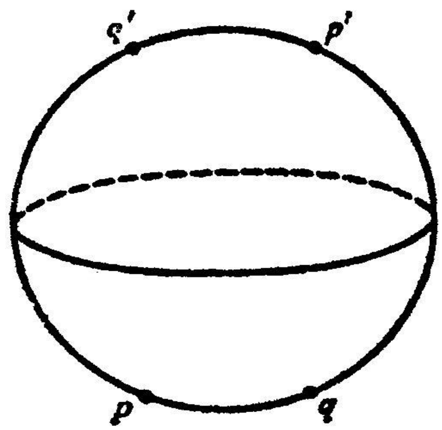

Рис. 3

Следствие 8.4. *Пространство путей* $\Omega(\mathbb{S}^n; p, q)$ *имеет гомотопический тип клеточного комплекса с одной клеткой каждой из размерностей* $0,\ n-1,\ 2(n-1),\ 3(n-1), \ldots$.

9. Некоторые соотношения между топологией и кривизной

Напомним, что в §2 главы 5 мы ввели понятие секционной кривизны риманова многообразия в данной точке и в данном двумерном направлении.

Лемма 9.1. *Предположим, что секционная кривизна риманова многообразия M неположительна в любой точке и в любом двумерном направлении. Тогда никакие две точки M не сопряжены ни вдоль какой геодезической.*

Доказательство. Неположительность секционной кривизны означает, что

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle \le 0$$

для любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_pM$.

Пусть J — поле Якоби вдоль геодезической $\gamma : [a,b] \to M$. Мы должны показать, что если J обращается в нуль в двух различных точках отрезка $[a,b]$, то J тождественно равно нулю. Из уравнения Якоби

$$\frac{D^2J}{dt^2} + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma = 0$$

находим

$$\left\langle \frac{D^2J}{dt^2}, J\right\rangle = -\langle R(J,\dot\gamma)\dot\gamma, J\rangle \ge 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J,J\rangle = 2\frac{d}{dt}\left\langle \frac{DJ}{dt}, J\right\rangle = 2\left\langle \frac{D^2J}{dt^2}, J\right\rangle + 2\left\|\frac{DJ}{dt}\right\|^2 \ge 0.$$

Итак, функция $\|J(t)\|^2$ — выпуклая. Если выпуклая неотрицательная функция обращается в нуль в двух различных точках, то она тождественно равна нулю на отрезке, концами которого являются эти точки.

Итак, если J обращается в нуль в двух различных точках, то J тождественно равно нулю на отрезке с концами в этих точках. А поскольку J удовлетворяет дифференциальному уравнению, то оно тождественно равна нулю на всем отрезке $[a,b]$. $\square$

Теорема 9.2. (Теорема Адамара — Картана) *Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности n, секционная кривизна которого неположительна в любой точке и в любом двумерном направлении. Тогда (1) M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ и (2) любые две точки из M соединены единственной геодезической.*

Доказательство. Поскольку сопряженных точек нет, из теореме об индексе вытекает, что каждая геодезическая из p в q имеет равный нулю индекс. Применяя теорему 8.3, получаем, что $\Omega(M;p,q)$ имеет гомотопический тип нульмерного клеточного комплекса с одной нульмерной клеткой для каждой геодезической из p в q.

Односвязность M эквивалентна связности $\Omega(M;p,q)$. Так как связный нульмерный клеточный комплекс состоит из одной клетки, существует ровно одна геодезическая, соединяющая p и q.

Итак, экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_pM \to M$$

биективно. Согласно теореме 5.1, это отображение не имеет критических точек, т.е. является локальным диффеоморфизмом. Поскольку мы убедились в его биективности, то оно является диффеоморфизмом.

$\square$

Полные односвязные римановы многообразия неположительной секционной кривизны обычно называются *многообразиями Адамара.* Несмотря на топологическую тривиальность (диффеоморфность $\mathbb{R}^n$), геометрия геодезических такого многообразия может быть весьма разнообразной. Модельными примерами, представляющими два “крайних противоположных случая”, здесь являются $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой и гиперболическое пространство (или пространство Лобачевского) $\mathbb{H}^n$ с метрикой постоянной отрицательной секционной кривизны. Мы уже имели возможность познакомиться с плоскостью Лобачевского в упражнении 5 из §3 главы 5. Геометрия произвольного многообразия Адамара может варьироваться “от Евклида до Лобачевского”.

Если же мы откажемся от условия односвязности, сохранив требования полноты и неположительности секционной кривизны, то попадем в большой раздел римановой геометрии, называемой *геометрией римановых пространств неположительной кривизны*, который интенсивно развивается вплоть до настоящего времени. Здесь получено много глубоких результатов, но еще больше поставлено вопросов, ждущих своего решения. Из последних упомянем лишь наиболее известную *проблему классификации трехмерных пространственных форм*: описать все компактные трехмерные римановы многообразия постоянной отрицательной секционной кривизны. Для читателей, интересующихся геометрией римановых пространств неположительной кривизны, рекомендую книгу [4], основанную на лекциях Михаила Громова, внесшего значительный вклад в этот раздел римановой геометрии.

Второй пример, который мы подробно рассмотрим в этом параграфе, относится к разделу *геометрия римановых многообразий положительной кривизны*, который в определенном смысле противоположен предыдущему. Напомним, что в §2 главы 5 мы определили тензор Риччи $Ric_{ij} = R^p{}_{ipj}$. Для единичного вектора $X \in T_pM$ число

$$Ric(X, X) = Ric_{ij} X^i X^j$$

называется *кривизной Риччи* риманова многообразия M в точке p и направлении X. Кривизну Риччи можно интерпретировать в терминах секционной кривизны, как показывает следующая

Лемма 9.3. *Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ — ортонормированный базис пространства T_pM. тогда*

$$Ric(X_n, X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} K(X_i, X_n),$$

где $K(X, Y)$ — секционная кривизна в двумерном направлении, определяемом векторами X и Y.

Доказательство. По определению $Ric(X_n, X_n)$ равно следу матрицы $\langle R(X_i, X_n)X_n, X_j\rangle$. Так как n-ый диагональный член этой матрицы равен нулю, получаем

$$Ric(X_n, X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X_i, X_n)X_n, X_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(X_i, X_n).$$

□

Лемма 9.4. *Предположим, что кривизна Риччи n-мерного риманова многообразия M в любой точке $p \in M$ и для любого единичного вектора $X \in T_pM$ удовлетворяет неравенству*

$$Ric(X, X) \geq \frac{n-1}{r^2}, \tag{9.1}$$

где r — некоторое положительное число. Тогда каждая геодезическая в M длины больше πr содержит сопряженные точки и поэтому не является кратчайшей.

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, 1] \to M$ — геодезическая длины L. Дополним вектор $X_n(0) = \dot\gamma(0)/L$ до ортонормированного базиса $(X_1(0), \dots, X_n(0))$ пространства $T_{\gamma(0)}M$, а затем разнесем каждый из этих векторов параллельно вдоль γ. Тогда получится ортонормированный базис $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ пространства $T_{\gamma(t)}M$ для каждого t, такой, что

$$\dot\gamma = LX_n, \quad \frac{DX_i}{dt} = 0.$$

Пусть

$$W_i(t) = (\sin \pi t) X_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1). \tag{9.2}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}(H_\gamma E)(W_i,W_i) = -\int\limits_0^1 \left\langle W_i, \frac{D^2W_i}{dt^2} + R(W_i,\dot\gamma)\dot\gamma \right\rangle dt$$

$$= \int\limits_0^1 (\sin\pi t)^2\big(\pi^2 - L^2\langle R(X_i,X_n)X_i,X_n\rangle\big)\,dt.$$

Суммируя по $i = 1,\dots,n-1$ и используя лемму 9.3, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(H_\gamma E)(W_i,W_i) = \int\limits_0^1 (\sin\pi t)^2\big((n-1)\pi^2 - L^2 Ric(X_n,X_n)\big)\,dt.$$

Если $Ric(X_n,X_n) \ge (n-1)/r^2$ и $L > \pi r$, то правая часть этой формулы отрицательна. Поэтому $(H_\gamma E)(W_i,W_i) < 0$ хотя бы для одного i. Отсюда следует положительность индекса γ. Следовательно, по теореме об индексе γ содержит сопряженные точки.

Отсюда следует также, что γ не является кратчайшей. Действительно, если $\overline{\sigma} : (-\delta,\delta) \to \Omega$ — вариация кривой γ, для которой W_i есть векторное поле вариации, то

$$\left.\frac{dE(\overline{\sigma}(u))}{du}\right|_{u=0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2E(\overline{\sigma}(u))}{du^2}\right|_{u=0} = (H_\gamma E)(W_i,W_i) < 0.$$

Поэтому $E(\overline{\sigma}(u)) < E(\gamma)$ при малых $u \ne 0$. □

Замечание. Легко понять происхождение векторных полей (9.2). В случае сферы W_i — поля Якоби вдоль геодезической γ, соединяющей диаметрально противоположные точки сферы, которые порождаются вращениями сферы, оставляющими неподвижными концы γ. Мы обсуждали эти вращения в конце §5, когда доказывали сопряженность диаметральных точек сферы.

Диаметр риманова многообразия определяется формулой

$$\operatorname{diam} M = \sup_{p,q\in M} \rho(p,q).$$

Теорема 9.5. (Теорема Майерса) *Пусть M — полное n-мерное риманово многообразие, кривизна Риччи которого удовлетворяет (9.1) в любой точке $p \in M$ и для любого единичного вектора $X \in T_pM$, где r — положительная постоянная. Тогда M компактно и его диаметр не превосходит πr.*

Доказательство. Пусть $p,q \in M$ и γ — кратчайшая геодезическая, соединяющая p и q. Согласно лемме 9.4, длина γ не больше, чем πr. Итак, все точки M попарно удалены друг от друга не более чем на πr. Поскольку замкнутое ограниченное множество в полном многообразии компактно, отсюда следует, что само M компактно. □

Хорошим дополнением к теореме Майерса является следующая теорема, доказанная Топоноговым.

Теорема 9.6. *Если, в условиях теоремы Майерса,* $\operatorname{diam} M = \pi r$*, то M изометрично сфере $\mathbb{S}^n_r$ радиуса r со стандартной метрикой.*

Доказательство этой теоремы не приводим поскольку оно значительно сложнее, чем доказательство теоремы Майерса.

Список литературы

[1] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., "Физматгиз", 1961.
[2] Дж. Милнор. Теория Морса. М., "Мир", 1965.
[3] М.М. Постников. Введение в теорию Морса. М., "Наука", 1971.
[4] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder. Manifolds of nonpositive curvature. Birkhäser, 1985.