ГЛАВА IV. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

В. А. Шарафутдинов

1. Тензорная алгебра над конечномерным векторным пространством

Мы ограничимся рассмотрением векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, хотя все содержание настоящего параграфа дословно переносится на случай векторного пространства над произвольным полем.

Пусть V — действительное векторное пространство конечной размерности n. *Линейным функционалом* на V называется отображение $\omega : V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$\omega(\alpha X + \beta Y) = \alpha\omega(X) + \beta\omega(Y) \quad \text{для} \quad X, Y \in V;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через V' множество всех линейных функционалов на V. На этом множестве вводится структура действительного векторного пространства посредством равенства

$$(\alpha\omega + \beta\varepsilon)(X) = \alpha\omega(X) + \beta\varepsilon(X) \quad \text{для} \quad \omega, \varepsilon \in V';\ X \in V;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Пространство V' называется *сопряженным* к V. Как мы увидим чуть позже, размерность V' также равна n.

Для $\omega \in V'$ и $X \in V$ значение $\omega(X)$ будем впредь обозначать через $\langle\omega, X\rangle$. Отображение

$$V' \times V \to \mathbb{R}, \quad (\omega, X) \mapsto \langle\omega, X\rangle \tag{1.1}$$

называется *каноническим спариванием* пространств V' и V. Это отображение *билинейно*, т.е. линейно по каждому аргументу:

$$\langle\alpha\omega + \beta\varepsilon, X\rangle = \alpha\langle\omega, X\rangle + \beta\langle\varepsilon, X\rangle,$$
$$\langle\omega, \alpha X + \beta Y\rangle = \alpha\langle\omega, X\rangle + \beta\langle\omega, Y\rangle.$$

Согласно определению линейного функционала, если для $\omega \in V'$ выполняется

$$\langle\omega, X\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in V,$$

то $\omega = 0$. Справедливо и двойственное утверждение: если

$$\langle\omega, X\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \in V',$$

то $X = 0$. Это вытекает из известной теоремы Хана – Банаха (которая очевидна в случае конечномерного пространства): для любого $0 \neq X \in V$ найдется такой $\omega \in V'$, что $\langle\omega, X\rangle \neq 0$.

При фиксированном $\omega \in V'$ отображение

$$V \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \langle\omega, X\rangle$$

является линейным функционалом на V и все линейные функционалы на V имеют такой вид. В силу предыдущего абзаца справедливо и двойственное утверждение: при фиксированном $X \in V$ отображение

$$V' \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \langle\omega, X\rangle$$

Date: март 2013, Кольцово.

является линейным функционалом на V' и все линейные функционалы на V' имеют такой вид. Иными словами,

$$V'' = V, \tag{1.2}$$

т.е. второе сопряженное к конечномерному пространству V каноническим образом отождествляется с самим V.

Напомним, что в функциональном анализе сопряженное V' к банахову пространству V определяется как множество всех *непрерывных* линейных функционалов на V. Для банаховых пространств соотношение (1.2) справедливо далеко не всегда. Банаховы пространства, удовлетворяющие (1.2), называются *рефлексивными*.

Определение 1.1. *Пусть V — действительное конечномерное векторное пространство и (r,s) — пара неотрицательных целых чисел. Тензором валентности (r,s) на V называется $\mathbb{R}$-полилинейное (т.е. $\mathbb{R}$-линейное по каждому аргументу) отображение*

$$T : \underbrace{V' \times \dots \times V'}_{r} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s} \to \mathbb{R},$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \mapsto T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

Число r называется контравариантной валентностью тензора T, а число s — ковариантной валентностью. Тензоры валентности $(r,0)$ называются контравариантными, а тензоры валентности $(0,s)$ — ковариантными.

Обозначим через $\otimes^r_s V$ множество всех тензоров валентности (r,s) на V. Это множество снабжается структурой действительного векторного пространства посредством формулы

$$(\alpha S + \beta T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \\ = \alpha S(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \beta T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

Чуть позже мы убедимся, что размерность этого пространства равна n^{r+s}. Чтобы освоиться с этим понятием, рассмотрим сначала несколько частных значений валентности (r,s).

Возможно, определение 1.1 не вполне ясно при $(r,s) = (0,0)$. По определению, $\otimes^0_0 V = \mathbb{R}$, т.е. тензоры валентности $(0,0)$ являются действительными числами.

Согласно определению 1.1, тензор валентности $(1,0)$ есть линейное отображение $T : V' \to \mathbb{R}$, т.е. элемент пространства V''. Поскольку V'' отождествлено с V, мы можем утверждать, что

$$\otimes^1_0 V = V,$$

т.е. тензоры валентности $(1,0)$ являются векторами.

Аналогично устанавливается равенство

$$\otimes^0_1 V = V',$$

т.е. тензоры валентности $(0,1)$ являются линейными функционалами на V. Наряду с названием "линейный функционал на V" используются синонимы "1-форма на V" и "ковектор пространства V". Чаще всего я буду использовать последнее название.

Пространство $\otimes^1_1 V$ может быть отождествлено с пространством $L(V,V)$ всех линейных операторов $V \to V$:

$$\otimes^1_1 V = L(V,V). \tag{1.3}$$

Действительно, пусть $T \in \otimes^1_1 V$. Для фиксированного $X \in V$ отображение $\omega \mapsto T(\omega, X)$ есть линейный функционал на V', т.е. может быть отождествлено с некоторым вектором $\tilde{T}(X) \in V$. Тем самым мы получаем отображение $\tilde{T} : V \to V$, которое очевидным образом линейно, т.е. $\tilde{T} \in L(V, V)$. Обычно оператор $\tilde{T} \in L(V, V)$ отождествляется с тензором $T \in \otimes_1^1 V$. Это отождествление определяется формулой

$$\langle \omega, T(X) \rangle = T(\omega, X). \tag{1.4}$$

Обобщая рассуждения предыдущего абзаца, мы отождествляем

$$\otimes_s^1 V = L(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{s}, V), \tag{1.5}$$

где $L(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{s}, V)$ есть пространство всех полилинейных отображений $\underbrace{V \times \ldots V}_{s} \to V$. Это отождествление осуществляется посредством следующего аналога формулы (1.4):

$$\langle \omega, T(X_1, \ldots, X_s) \rangle = T(\omega, X_1, \ldots, X_s). \tag{1.6}$$

Перечислим основные алгебраические операции, определенные на тензорах.

Тензоры одинаковой валентности можно складывать и умножать на действительные числа поскольку $\otimes_s^r V$ является векторным пространством, см. формулу (1.1).

Для двух тензоров $S \in \otimes_s^r V$ и $T \in \otimes_{s'}^{r'} V$ их *тензорное произведение* $S \otimes T \in \otimes_{s+s'}^{r+r'} V$ определяется формулой

$$\begin{aligned}(S \otimes T)&(\omega^1, \ldots, \omega^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) \\ &= S(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)\, T(\omega^{r+1}, \ldots, \omega^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}).\end{aligned}$$

Это произведение определяет структуру *биградуированной алгебры* на векторном пространстве

$$\otimes V = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \left(\otimes_s^r V\right). \tag{1.7}$$

Термин "биградуированная" означает, что произведение в алгебре согласовано с разложением (1.7): произведение элементов из $\otimes_s^r V$ и $\otimes_{s'}^{r'} V$ принадлежит $\otimes_{s+s'}^{r+r'} V$. Алгебра $\otimes V$ называется *тензорной алгеброй над пространством* V.

Напомним, что *след* $\operatorname{tr} T$ линейного оператора $T \in L(V, V)$ определяется как сумма диагональных элементов матрицы, представляющей оператор T в некотором базисе пространства V; эта сумма не зависит от выбора базиса. В силу отождествления $L(V, V) = \otimes_1^1 V$ мы получаем корректно определенное линейное отображение

$$\operatorname{tr} : \otimes_1^1 V \to \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Пусть $1 \le k \le r$ и $1 \le \ell \le s$. След (1.8) позволяет ввести линейный оператор

$$C_\ell^k : \otimes_s^r V \to \otimes_{s-1}^{r-1} V, \tag{1.9}$$

который называется *сверткой* по k-му верхнему и ℓ-му нижнему индексам. Этот оператор определяется следующим образом. Рассмотрим

$$T(\omega^1, \ldots, \omega^k, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_\ell, \ldots, X_s)$$

как функцию двух аргументов $\omega^k \in V'$ и $X_\ell \in V$, считая все остальные аргументы в этом выражении фиксированными. Как функция аргументов ω^k и X_ℓ, это выражение представляет тензор из $\otimes_1^1 V$ и, следовательно, определен след этого тензора. Мы полагаем

$$\begin{aligned}(C_\ell^k T)&(\omega^1, \ldots, \omega^{k-1}, \omega^{k+1}, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_{\ell-1}, X_{\ell+1}, \ldots, X_s) \\ &= \operatorname{tr}_{(\omega^k, X_\ell)} T(\omega^1, \ldots, \omega^k, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_\ell, \ldots, X_s).\end{aligned}$$

Перейдем теперь к координатному представлению тензоров. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ — базис пространства V. Произвольный вектор $X\in V$ единственным образом представим в виде

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^ie_i, \tag{1.10}$$

где $X^i\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$ — *координаты* вектора X относительно данного базиса. В тензорном анализе обычно используется *правило суммирования Эйнштейна*: `Если некоторый индекс повторяется в мономе дважды, в верхней и нижней позициях, то по этому индексу подразумевается суммирование от 1 до` $n=$ `dim`V. Соответственно этому правилу, формула (1.10) упрощается до следующей:

$$X=X^ie_i. \tag{1.11}$$

Имея базис $(e_1,\dots,e_n)$ пространства V, определим ковекторы $\theta^j\in V'$ $(1\le j\le n)$ равенствами

$$\langle\theta^j,e_i\rangle=\delta^j_i=\begin{cases}1 & \text{при}\quad i=j,\\ 0 & \text{при}\quad i\ne j.\end{cases} \tag{1.12}$$

Легко убедиться, что набор $(\theta^1,\dots,\theta^n)$ является базисом пространства V' (проверьте), который называется *двойственным* к базису $(e_1,\dots,e_n)$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim V'=n$. Любой ковектор $\omega\in V'$ единственным образом представим в виде

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\theta^i,$$

где $\omega_i\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$ — *координаты* ковектора ω относительно данного базиса. Используя правило Эйнштейна, эту формулу также сокращаем до следующей:

$$\omega=\omega_i\theta^i. \tag{1.13}$$

Сравнивая (1.11) и (1.13), обращаем внимание на следующее обстоятельство: для обозначения координат вектора используются верхние индексы, а для обозначения координат ковектора — нижние.

Отметим, что каноническое спаривание (1.1) выражается в координатах так:

$$\langle\omega,X\rangle=\omega_iX^i. \tag{1.14}$$

Перейдем теперь к определению координат произвольного тензора $T\in\otimes^r_sV$. В выражении $T(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s)$ представим каждый аргумент в виде

$$\omega^1=\omega^1_{i_1}\theta^{i_1},\dots,\omega^r=\omega^r_{i_r}\theta^{i_r},$$
$$X_1=X_1^{j_1}e_{j_1},\dots,X_s=X_s^{j_s}e_{j_s}.$$

Используя полилинейность, получаем

$$T(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s)=T(\theta^{i_1},\dots,\theta^{i_r},e_{j_1},\dots,e_{j_s})\,\omega^1_{i_1}\dots\omega^r_{i_r}X_1^{j_1}\dots X_s^{j_s}. \tag{1.15}$$

Числа

$$T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}=T(\theta^{i_1},\dots,\theta^{i_r},e_{j_1},\dots,e_{j_s}) \tag{1.16}$$

называются *координатами* тензора T относительно базиса $(e_1,\dots,e_n)$. Формула (1.15) приобретает вид

$$T(\omega^1,\dots,\omega^r,X_1,\dots,X_s)=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\,\omega^1_{i_1}\dots\omega^r_{i_r}X_1^{j_1}\dots X_s^{j_s}. \tag{1.17}$$

Подчеркнем, что правая часть этого равенства является суммой из n^{r+s} слагаемых, поскольку по каждому из индексов $(i_1,\dots i_r,j_1,\dots,j_s)$ выполняется суммирование от 1 до n. Таким образом, тензор $T \in \otimes^r_s V$ имеет n^{r+s} координат и, следовательно, $\dim(\otimes^r_s V) = n^{r+s}$.

Отдельно выпишем формулу (1.17) в случае $r = 0$

$$T(X_1, \dots, X_s) = T_{j_1 \dots j_s}\, X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \quad \text{для} \quad T \in \otimes^0_s V \tag{1.18}$$

и в случае $r = 1$

$$T(X_1, \dots, X_s) = T^i_{j_1 \dots j_s}\, X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}\, e_i \quad \text{для} \quad T \in \otimes^1_s V. \tag{1.19}$$

В последней формуле T трактуется как полилинейное отображение $T : V \times \dots \times V \to V$ в соответствии с отождествлением (1.5).

Отметим, что формула (1.17) эквивалентна следующей:

$$T = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}. \tag{1.20}$$

Иными словами, совокупность из n^{r+s} произведений $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}$ образует базис пространства $\otimes^r_s V$.

Введенные ранее алгебраические операции над тензорами выражаются в координатах формулами

$$(\alpha S + \beta T)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \alpha S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \beta T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

$$(S \otimes T)^{i_1 \dots i_{r+r'}}_{j_1 \dots j_{s+s'}} = S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\, T^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}}_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}},$$

$$\operatorname{tr} T = T^p_p \quad \text{для} \quad T \in \otimes^1_1 V,$$

$$(C^k_\ell T)^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = T^{i_1 \dots i_{k-1} p i_k \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{\ell-1} p j_\ell \dots j_{s-1}}.$$

В заключение параграфа рассмотрим важный вопрос о преобразовании координат тензора при замене базиса. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса пространства V. *Матрица перехода* $B = (b^j_i)$ от первого базиса ко второму определяется посредством формулы

$$e'_i = b^j_i e_j. \tag{1.21}$$

Пусть $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ и $(\theta'^1, \dots, \theta'^n)$ — базисы пространства V', двойственные к базисам $(e_1, \dots, e_n)$ и $(e'_1, \dots, e'_n)$ соответственно. Связь между этими базисами дается формулой

$$\theta'^i = a^i_j \theta^j, \tag{1.22}$$

где $A = (a^i_j)$ — обратная к B матрица. Чтобы убедиться в справедливости (1.22), достаточно подставить значения (1.21) и (1.22) в формулу (1.12)

$$\delta^j_i = \langle \theta'^j, e'_i \rangle = \langle a^j_k \theta^k, b^\ell_i e_\ell \rangle = a^j_k b^\ell_i \langle \theta^k, e_\ell \rangle = a^j_k b^\ell_i \delta^k_\ell = a^j_k b^k_i.$$

Равенство $= a^j_k b^k_i = \delta^j_i$ эквивалентно соотношению $B = A^{-1}$.

Пусть $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ — координаты тензора $T \in \otimes^r_s V$ относительно базиса $(e_1, \dots, e_n)$ и $T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ — координаты того же тензора относительно базиса $(e'_1, \dots, e'_n)$. Найдем связь между этими координатами. Согласно (1.16),

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T(\theta'^{i_1}, \dots, \theta'^{i_r}, e'_{j_1}, \dots, e'_{j_s}).$$

Подставляя сюда выражения (1.21)–(1.22) для аргументов и используя полилинейность, получаем

$$\begin{aligned} T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} &= T(a^{i_1}_{k_1} \theta^{k_1}, \dots, a^{i_r}_{k_r} \theta^{k_r}, b^{\ell_1}_{j_1} e_{\ell_1}, \dots, b^{\ell_s}_{j_s} e_{\ell_s}) \\ &= a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_r}_{k_r}\, b^{\ell_1}_{j_1} \dots b^{\ell_s}_{j_s}\, T(\theta^{k_1}, \dots, \theta^{k_r}, e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_s}). \end{aligned}$$

Таким образом мы приходим к *правилу преобразования координат тензора* при замене базиса
$$T'^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = a^{i_1}_{k_1}\dots a^{i_r}_{k_r}\, b^{\ell_1}_{j_1}\dots b^{\ell_s}_{j_s}\, T^{k_1\dots k_r}_{\ell_1\dots\ell_s}. \tag{1.23}$$
Формула (1.23) является основной формулой тензорной алгебры. Во многих старых учебниках по геометрии (и в некоторых новых учебниках по физике) Вы можете встретить следующее определение: тензором валентности (r,s) на векторном пространстве V называется правило, сопоставляющее каждому базису пространства V совокупность чисел $(T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s})$, которая преобразуется по формуле (1.23) при замене базиса.

Упражнения

1. Докажите, что $\otimes^r_s V$ и $\otimes^s_r V$ могут рассматриваться как сопряженные друг другу векторные пространства, т.е. что существует каноническое отождествление
$$(\otimes^r_s V)' = \otimes^s_r V,$$
а каноническое спаривание
$$(\otimes^s_r V) \times (\otimes^r_s V) \to \mathbb{R}$$
выражается в координатах формулой
$$\langle S, T\rangle = S^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}.$$

2. *Рангом* тензора $T \in \otimes^2_0 V$ называется ранг матрицы (T^{ij}), образованной координатами этого тензора относительно некоторого базиса. Докажите независимость этого ранга от выбора базиса. Найдите ранги тензоров $X \otimes Y$ и $X\otimes Y + Y \otimes X$ для $X, Y \in V$.

3. Докажите, что если тензор $T \in \otimes^0_2 V$ удовлетворяет
$$T(X,X) = 0 \quad \text{для любого} \quad X \in V,$$
то этот тензор *кососимметричен*, т.е.
$$T(X,Y) = -T(Y,X) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in V.$$
Как выглядит аналог этого утверждения для ковариантных тензоров валентности 3?

2. Тензорные поля на многообразии

В каждой точке p гладкого многообразия M определено касательное векторное пространство T_pM размерности $n = \dim M$. Для T_pM мы можем рассматривать все понятия, которые в предыдущем параграфе вводились для произвольного конечномерного пространства V. В частности, через T'_pM обозначаем сопряженное пространство и через
$$\otimes(T_pM) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \big(\otimes^r_s(T_pM)\big)$$
тензорную алгебру над T_pM. Таким образом, мы можем говорить о тензорах в точке $p \in M$.

Нас больше интересуют не тензоры в отдельных точках, а тензорные поля, т.е. функции, сопоставляющие каждой точке $p \in M$ тензор из $\otimes^r_s(T_pM)$. Чтобы определить понятие *гладкого* тензорного поля, мы сначала рассмотрим координаты тензора.

Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M с областью определения $U \subset M$. Обратите внимание, что отныне координаты нумеруются верхними индексами; это связано с правилом суммирования Эйнштейна. Как мы знаем (см. §4 главы

2), в каждой точке $p \in U$ определены координатные векторы $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \in T_pM$ ($1 \le i \le n$), образующие базис пространства T_pM. Обозначим двойственный базис пространства T'_pM через $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$. Согласно (1.20), любой тензор $T_p \in \otimes^r_s(T_pM)$ однозначно представим в виде

$$T_p = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\bigg|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p. \tag{2.1}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство, связанное с правилом Эйнштейна: в выражении $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p$ индекс i_1 считается нижним индексом, поскольку он стоит в знаменателе дроби. Правая часть формулы (2.1) является суммой, состоящей из n^{r+s} слагаемых. Коэффициенты $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \in \mathbb{R}$ этой суммы называются *координатами* тензора $T_p \in \otimes^r_s(T_pM)$ относительно локальной системы координат $(U; x^1, \dots, x^n)$.

Определение 2.1. *Гладким тензорным полем T валентности (r, s) на многообразии M называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in M$ тензор $T_p \in \otimes^r_s(T_pM)$, которая является гладкой в следующем смысле. Для каждой точки $p_0 \in M$ существует такая локальная система координат $(U; x^1, \dots, x^n)$, определенная в некоторой окрестности точки p_0, что все коэффициенты $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ суммы (2.1) являются гладкими функциями точки $p \in U$.*

Обозначим через $\mathcal{T}^r_s = \mathcal{T}^r_s(M)$ множество всех гладких тензорных полей валентности (r, s) на M. Это множество превращается в действительное векторное пространство (бесконечной размерности), если операции сложения тензорных полей и умножения тензорного поля на число определить равенством

$$(\alpha S + \beta T)_p = \alpha S_p + \beta T_p \quad (S, T \in \mathcal{T}^r_s;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Напомним, что через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ мы обозначаем кольцо всех гладких действительных функций на M. Гладкие тензорные поля можно умножать на гладкие функции по правилу

$$(fT)_p = f(p)T_p \quad (T \in \mathcal{T}^r_s;\ f \in \mathcal{F}).$$

Таким образом $\mathcal{T}^r_s$ становится $\mathcal{F}$-модулем.

Для $S \in \mathcal{T}^r_s$ и $T \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$ *тензорное произведение* $S \otimes T \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}$ определяется равенством

$$(S \otimes T)_p = S_p \otimes T_p.$$

Снабженное этим произведением, пространство

$$\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}^r_s(M)$$

становится биградуированной $\mathcal{F}(M)$-алгеброй. Отметим, что как и требует определение алгебры над кольцом $\mathcal{F}$, тензорное произведение удовлетворяет правилу

$$(fS) \otimes T = S \otimes (fT) = f(S \otimes T) \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Для $1 \le k \le r$ и $1 \le \ell \le s$ *свертка*

$$C^k_\ell : \mathcal{T}^r_s \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}$$

определяется равенством $(C^k_\ell T)_p = C^k_\ell(T_p)$.

Напомним, что через $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$ обозначается $\mathcal{F}$-модуль всех гладких векторных полей на M, см. §5 главы 2. В дальнейшем нам будут, в основном, встречаться тензорные поля валентностей $(0, s)$ и $(1, s)$. Для таких полей справедливо следующее

Предложение 2.2.

(1) *Тензорное поле $T \in \mathcal{T}^0_s(M)$ может рассматриваться как полилинейное отображение*

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{s} \to \mathcal{F},$$

удовлетворяющее

$$T(f_1X_1, \dots, f_sX_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s) \quad \text{для} \quad f_i \in \mathcal{F},\ X_i \in \mathcal{V}. \tag{2.2}$$

Обратно, любое такое отображение можно рассматривать как тензорное поле валентности $(0, s)$.

(2) *Тензорное поле $T \in \mathcal{T}^1_s(M)$ может рассматриваться как полилинейное отображение*

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{s} \to \mathcal{V}, \tag{2.3}$$

удовлетворяющее (2.2). Обратно, любое такое отображение можно рассматривать как тензорное поле валентности $(1, s)$.

Доказательство. Мы докажем утверждение (2). То же доказательство с очевидными изменениями справедливо и для утверждения (1).

Пусть задано тензорное поле $T \in \mathcal{T}^1_s$. Согласно отождествлению (1.5), для каждой точки $p \in M$ тензор T_p может рассматриваться как полилинейное отображение

$$T_p : \underbrace{(T_pM) \times \dots \times (T_pM)}_{s} \to T_pM.$$

Отсюда отображение $(X_1, \dots, X_s) \mapsto T_p\big((X_1)_p, \dots, (X_s)_p\big)$ есть полилинейное отображение из $\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ в $\mathcal{V}$, удовлетворяющее (2.2).

Обратно, пусть задано полилинейное отображение (2.3), удовлетворяющее (2.2). Существенный пункт доказательства — это показать, что значение векторного поля $T(X_1, \dots, X_s)$ в точке p зависит только от значений полей X_i в p. Мы заметим сначала, что отображение T может быть локализовано.

Лемма 2.3. *Пусть задано полилинейное отображение (2.3), удовлетворяющее (2.2). Если $X_i = Y_i$ $(1 \le i \le s)$ в некоторой окрестности V точки p, то*

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(Y_1, \dots, Y_s) \quad \text{в} \quad V.$$

Доказательство леммы. Достаточно показать, что если $X_1 = 0$ в области V, то $T(X_1, \dots, X_s) = 0$ в V. Для произвольной точки $q \in V$ найдем такую функцию $f \in \mathcal{F}(M)$, что $f(q) = 0$ и $f = 1$ вне V. Тогда $X_1 = fX_1$ и

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(fX_1, X_2, \dots, X_s) = fT(X_1, \dots, X_s).$$

Правая часть этой формулы обращается в нуль в точке q. Это доказывает лемму. $\square$

Чтобы завершить доказательство предложения 2.2, достаточно показать, что если $(X_1)_p = 0$, то векторное поле $T(X_1, \dots, X_s)$ обращается в нуль в точке p. Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат, определенная в окрестности точки p, так что $X_1 = X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ в U. Мы можем выбрать векторные поля $Y_i \in \mathcal{V}(M)$ $(1 \le i \le n)$ и функции $f^i \in \mathcal{F}(M)$ так, что $f^i = X_1^i$ и $Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ в некоторой меньшей окрестности V точки p. Тогда $X_1 = f^iY_i$ в V. По лемме

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(f^iY_i, X_2, \dots, X_s) = f^i\, T(Y_i, X_2, \dots, X_s).$$

Правая часть этой формулы обращается в нуль в точке p поскольку $f^i(p) = X_1^i(p) = 0$. $\square$

Рассмотрим несколько частных значений валентности (r, s). Очевидно

$$\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{F}(M),$$

т.е. тензорные поля валентности $(0, 0)$ являются гладкими функциями.

В случае $(r, s) = (1, 0)$, сравнив определение 2.1 с приведенным в §5 главы 2 определением векторного поля, мы видим, что

$$\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M),$$

т.е. тензорные поля валентности $(1, 0)$ — это векторные поля.

Тензорные поля валентности $(0, 1)$ обычно называются *ковекторными полями.* Согласно утверждению (1) предложения 2.2, такое поле $T \in \mathcal{T}_1^0(M)$ можно рассматривать как $\mathcal{F}$-линейное отображение $T : \mathcal{V} \to \mathcal{F}$. Иными словами,

$$\mathcal{T}_1^0 = \mathcal{V}', \tag{2.4}$$

Где $\mathcal{V}'$ — сопряженный к $\mathcal{V}$ $\mathcal{F}$-модуль.

Напомним (см. §5 главы 2), что векторное поле $X \in \mathcal{V}$ может рассматриваться как дифференцирование алгебры $\mathcal{F}$, т.е. для любой гладкой функции f определена функция $Xf \in \mathcal{F}$. Если мы зафиксируем $f \in \mathcal{F}$ и рассмотрим Xf как функцию аргумента $X \in \mathcal{V}$, то получим $\mathcal{F}$-линейное отображение

$$df : \mathcal{V} \to \mathcal{F}, \quad (d\,f)(X) = Xf. \tag{2.5}$$

Согласно предложению 2.2, df является ковекторным полем, $df \in \mathcal{T}_1^0(M)$, которое называется *дифференциалом* функции f. В несколько ином контексте мы встречались ранее с этим понятием: значение ковекторного поля df в точке p является линейным функционалом $T_pM \to \mathbb{R}$, который обозначался d_pf и назывался дифференциалом функции $f : M \to \mathbb{R}$ в точке p (см. определение 4.5 из §4 главы 2).

Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M. Тогда $x^i \in \mathcal{F}(U)$ $(1 \le i \le n)$ и определен дифференциал $dx^i \in \mathcal{T}_1^0(U)$. Согласно (2.5),

$$(dx^i)\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j, \end{cases}$$

т.е. $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ является базисом пространства T'_pM двойственным к базису $\big(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p\big)$ для каждой точки $p \in U$. Это объясняет выбор обозначения $dx^i|_p$ в формуле (2.1). Далее, для векторного поля $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{V}(U)$

$$(dx^i)(X) = (dx^i)\Big(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = X^j (dx^i)\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = X^j \delta^i_j = X^i.$$

Следовательно, для $f \in \mathcal{F}(U)$

$$(df)(X) = Xf = \Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(dx^i)(X) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\Big)(X),$$

т.е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Это равенство оправдывает название "дифференциал функции f" для ковекторного поля df.

Итак, в области определения U локальной системы координат определены *координатные векторные поля* $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{V}(U)$ и *координатные ковекторные поля* $dx^i \in \mathcal{T}_1^0(U)$.

Набор из $2n$ координатных полей $(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n},dx^1,\dots,dx^n)$ является системой образующих алгебры $\mathcal{T}(U)$, т.е. любое тензорное поле $T\in\mathcal{T}^r_s(U)$ однозначно представимо в виде суммы (ср. с формулой (2.1))

$$T=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}, \tag{2.6}$$

коэффициенты которой $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\in\mathcal{F}(U)$ называются *координатами тензорного поля* T относительно локальной системы координат $(U;x^1,\dots,x^n)$. Обычно этот факт выражают фразой: алгебра тензорных полей на n-мерном многообразии является локально свободной $\mathcal{F}$-алгеброй с $2n$ образующими. Отметим, что глобальный вариант этого утверждения верен не всегда: алгебра $\mathcal{T}(M)$ может не быть конечно-порожденной.

В заключение параграфа приведем правило преобразования координат тензорного поля при замене координат. Пусть $(U;x^1,\dots,x^n)$ и $(U';x'^1,\dots,x'^n)$ — две локальные системы координат на M. В области $U\cap U'$ эти координаты однозначно выражаются друг через друга

$$x'^i=x'^i(x^1,\dots,x^n),\quad x^i=x^i(x'^1,\dots,x'^n)\quad(1\le i\le n).$$

Как мы установили в §2 главы 2, координатные векторные поля преобразуются по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x'^i}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.7}$$

Аналогичное правило преобразования координатных ковекторных полей выглядит так:

$$dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\,dx^j. \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.7)–(2.8) с формулами (1.21)–(1.22), мы видим, что матрицы перехода A и B в данном случае совпадают с матрицами Якоби

$$A=\Big(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Big),\quad B=A^{-1}=\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\Big)$$

и формула (1.23) приобретает вид

$$T'^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}=\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\dots\frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial x'^{j_1}}\dots\frac{\partial x^{\ell_s}}{\partial x'^{j_s}}T^{k_1\dots k_r}_{\ell_1\dots\ell_s}. \tag{2.9}$$

Это и есть правило преобразования координат тензорного поля при замене системы координат. Эту формулу можно использовать в качестве определения гладкого тензорного поля, ср. с замечанием в конце предыдущего параграфа.

Упражнения

1. Докажите рефлексивность $\mathcal{F}$-модуля $\mathcal{V}=\mathcal{V}(M)$, т.е. что $\mathcal{V}''=\mathcal{V}$. В отличие от (1.2), это утверждение не очевидно поскольку пространство $\mathcal{V}(M)$ бесконечномерно. В доказательстве должны участвовать некоторые аргументы, использующие локальные координаты, аналогично доказательству предложения 2.2.

2. Докажите следующее обобщение предложения 2.2; пространство $\mathcal{T}^r_s(M)$ можно отождествить с пространством всех $\mathcal{F}$-полилинейных отображений

$$T:\underbrace{\mathcal{V}'\times\dots\times\mathcal{V}'}_{r}\times\underbrace{\mathcal{V}\times\dots\times\mathcal{V}}_{s}\to\mathcal{F}.$$

3. Докажите, что $\mathcal{F}(M)$-модули $\mathcal{T}^r_s(M)$ и $\mathcal{T}^s_r(M)$ сопряжены друг другу, а каноническое спаривание

$$\mathcal{T}^r_s(M)\times\mathcal{T}^s_r(M)\to\mathcal{F}(M)$$

выражается в координатах формулой

$$\langle S, T\rangle = S^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\, T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}.$$

3. Связность на многообразии

Этот параграф — центральный в настоящей главе. Прежде, чем приступить к формальному изложению, приведу замечание, которое может рассматриваться как мотивировка основного определения.

Векторное поле $X \in \mathcal{V}(M)$ в локальных координатах записывается в виде $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Координаты векторного поля преобразуются при замене координат по правилу

$$X'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, X^k. \tag{3.1}$$

Найдем правило преобразования производных $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$. Для этого сначала применяем правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial X'^i}{\partial x^\ell}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}.$$

Подставляя сюда значение (3.1), получаем

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}\,\frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, X^k\Big).$$

Дифференцируя произведение в правой части, приходим к искомому правилу преобразования

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}\,\frac{\partial X^k}{\partial x^\ell} + \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}\,\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^\ell}\, X^k. \tag{3.2}$$

Правая часть этой формулы содержит производные второго порядка $\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^\ell}$, которые не участвуют в правиле (2.9) преобразования координат тензора. Таким образом, набор производных $\big(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\big)$ *не является* семейством координат тензорного поля. Возникает вопрос: нельзя ли исправить ситуацию, добавив к частной производной $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ некоторое алгебраическое выражение, т.е. заменив эту производную оператором

$$\nabla_j X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k, \tag{3.3}$$

где Γ^i_{jk} — некоторые функции? Мы пытаемся подобрать эти функции так, чтобы определенный формулой (3.3) набор $(\nabla_j X^i)$ представлял координаты некоторого тензорного поля валентности $(1,1)$, т.е. преобразовывался по правилу (2.9) при замене координат. Переходя к реализации этого плана, мы снова возвращаемся к инвариантному (т.е. не зависящему от координат) изложению.

Определение 3.1. *Связностью на гладком многообразии M называется отображение*

$$\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y, \tag{3.4}$$

удовлетворяющее условиям:

(1) *Это отображение $\mathcal{F}$-линейно по первому аргументу, т.е.*

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \quad \textit{для} \quad X_1, X_2, Y \in \mathcal{V};\ f_1, f_2 \in \mathcal{F}. \tag{3.5}$$

(2) *По второму аргументу это отображение аддитивно*

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \quad \textit{для} \quad X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{V} \tag{3.6}$$

и является дифференцированием по отношению к умножению второго аргумента на функцию, т.е.

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \textit{для} \quad X, Y \in \mathcal{V};\ f \in \mathcal{F}. \tag{3.7}$$

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется ковариантной производной векторного поля Y по направлению поля X (относительно связности ∇).

В следующей главе мы убедимся, что на каждом многообразии существует связность (на самом деле на любом многообразии существует бесконечно много связностей). Продолжим наши рассуждения в предположении, что на M задана связность ∇. Доказательство следующего утверждения не приводится поскольку оно аналогично двум ранее доказанным утверждениям: лемме 2.3 настоящей главы и лемме 4.2 главы 2.

Лемма 3.2. (о локализации) *Если $X_1 = X_2$ и $Y_1 = Y_2$ на некотором открытом множестве $U \subset M$, то и $\nabla_{X_1}Y_1 = \nabla_{X_2}Y_2$ на U.*

Эта лемма позволяет при изучении связности ограничиться рассмотрением векторных полей в области определения локальной системы координат. Если $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M, то определены координатные векторные поля $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{V}(U)$. Представим векторное поле $\nabla_{\partial_i}\partial_j \in \mathcal{V}(U)$ в виде линейной комбинации координатных полей

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k. \tag{3.8}$$

Определяемые этим равенством функции $\Gamma^k_{ij} \in \mathcal{F}(U)$ называются *символами Кристоффеля* связности ∇ (относительно данной системы координат). Символы Кристоффеля однозначно определяют связность. Действительно, используя аксиомы (3.5)–(3.7), мы можем написать для векторных полей $X = X^i\partial_i$ и $Y = Y^i\partial_i$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\Big(Y^j\,\nabla_{\partial_i}\partial_j + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\partial_j\Big).$$

Подставляя сюда выражение (3.8), приходим к формуле

$$\nabla_X Y = X^i\Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}Y^j\Big)\partial_k. \tag{3.9}$$

Отсюда, в частности следует, что значение векторного поля $\nabla_X Y$ в точке p зависит лишь от значения поля X в точке p.

Выведем правило преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Пусть (Γ^k_{ij}) — символы Кристоффеля связности ∇ относительно системы координат $(U; x^1, \dots, x^n)$ и (Γ'^k_{ij}) — символы Кристоффеля той же связности ∇ относительно системы координат $(U'; x'^1, \dots, x'^n)$. Согласно (3.8),

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \Gamma'^k_{ij}\partial'_k. \tag{3.10}$$

В $U \cap U'$ координатные векторные поля связаны равенствами $\partial'_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\partial_\alpha$. Подставив эти значения в (3.10) и воспользовавшись аксиомами (3.5)–(3.7), получим

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\,\nabla_{\partial_\alpha}\Big(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\partial_\beta\Big) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\Big(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\Big)\partial_\beta\Big). \tag{3.11}$$

Участвующую в правой части вторую производную вычисляем по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\Big) = \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\ell\partial x'^j}.$$

Подставляем это значение и $\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma$ в (3.11)

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\Big(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma + \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\ell \partial x'^j}\partial_\beta\Big).$$

Заметим, что после раскрытия скобок второе слагаемое упростится в силу соотношения $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha} = \delta^\ell_i$. Произведя это упрощение и изменив обозначение индекса суммирования во втором слагаемом, получим

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \Big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}\Big)\partial_\gamma.$$

Наконец, подставим сюда значение $\partial_\gamma = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\partial'_k$

$$\nabla_{\partial'_i}\partial'_j = \Big(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}\Big)\partial'_k. \tag{3.12}$$

Левые части формул (3.10) и (3.12) совпадают. Приравнивая правые части этих формул и учитывая линейную независимость векторов ∂'_k $(1 \le k \le n)$, получаем искомое правило преобразования символов Кристоффеля при замене координат:

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}. \tag{3.13}$$

Как видно из этой формулы, символы Кристоффеля не являются координатами тензорного поля.

Нетрудно доказать следующее утверждение: Если в области определения U каждой локальной системы координат на многообразии M заданы функции $\Gamma^k_{ij} \in \mathcal{F}(U)$, преобразующиеся по правилу (3.13) при замене координат, то формула (3.9) корректно определяет связность на M.

Наряду с геометрией, формула (3.13) играет большую роль в общей теории относительности, где символы Кристоффеля имеют физический смысл потенциала гравитационного поля; см. например, том 2 известного учебника Ландау – Лифшица.

Будучи определенной на векторных полях, ковариантная производная ∇_X затем однозначно распространяется на тензорные поля произвольной валентности, если дополнительно потребовать ее согласованность с тензорным произведением и сверткой.

Теорема 3.3. *Если на гладком многообразии M задана связность ∇, то для каждого (r,s) существует единственный оператор (обозначаемый тем же символом)*

$$\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_s(M), \quad (X,T) \mapsto \nabla_X T, \tag{3.14}$$

Который $\mathcal{F}$-линеен по первому аргументу,

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}T = f_1\nabla_{X_1}T + f_2\nabla_{X_2}T \quad \text{для} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M), \tag{3.15}$$

и обладает следующими свойствами.

(1) $\nabla_X f = Xf$ *для* $f \in \mathcal{F}(M) = \mathcal{T}^0_0(M)$.

(2) *В случае $(r,s) = (1,0)$ оператор (3.14) совпадает с участвующим в определении связности оператором (3.4).*

(3) *Оператор ∇_X является дифференцированием по отношению к тензорному произведению, т.е.*

$$\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T). \tag{3.16}$$

(4) *Оператор ∇_X перестановочен со свертками, т.е.*

$$\nabla_X(C^k_\ell T) = C^k_\ell(\nabla_X T) \quad \text{для} \quad T \in \mathcal{T}^r_s(M);\ 1 \le k \le r, 1 \le \ell \le s. \tag{3.17}$$

В координатах этот оператор выражается формулой

$$\nabla_X T = X^k\,\nabla_k T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\,dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}, \tag{3.18}$$

где

$$\nabla_k T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}}{\partial x^k} + \sum_{a=1}^{r}\Gamma^{i_a}_{kp}T^{i_1\dots i_{a-1}p i_{a+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s} - \sum_{a=1}^{s}\Gamma^{p}_{kj_a}T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_{a-1}p j_{a+1}\dots j_s}. \tag{3.19}$$

Как и ранее, тензорное поле $\nabla_X T$ называется ковариантной производной поля T по направлению X.

Набросок доказательства. Предположив существование оператора (3.14), удовлетворяющего перечисленным условиям, докажем справедливость (3.18)–(3.19). Тем самым будет доказана единственность.

Заметим, что из условий (3) и (1) вытекает следующее правило дифференцирования произведения функции и тензорного поля:

$$\nabla_X(fT) = f\nabla_X T + (Xf)\,T \quad \text{для} \quad f\in\mathcal{F}. \tag{3.20}$$

Используя (3.15) и (3.20), для $\nabla_X T$ легко доказать принцип локализации, аналогичный лемме 3.2, который позволяет свести изучение ковариантной производной $\nabla_X T$ к случаю тензорного поля T, заданного лишь в области определения U некоторой локальной системы координат.

Для координатных полей $\partial_i\in\mathcal{V}(U)$ и $dx^j\in\mathcal{T}^0_1(U)$ ковариантная производная $\nabla_{\partial_i}(dx^j)\in\mathcal{T}^0_1(U)$ единственным образом представима в виде

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) = \widetilde{\Gamma}^j_{ik}\,dx^k \tag{3.21}$$

с некоторыми функциями $\widetilde{\Gamma}^j_{ik}\in\mathcal{F}(U)$. Выразим эти функции через символы Кристоффеля. Применяя оператор ∇_{∂_i} к равенству

$$C^1_1(dx^j\otimes\partial_k) = \langle dx^j,\partial_k\rangle = \delta^j_k = \mathrm{const}$$

и используя (3.16)–(3.17), получаем

$$C^1_1\big(\nabla_{\partial_i}(dx^j)\otimes\partial_k + dx^j\otimes\nabla_{\partial_i}\partial_k\big) = 0.$$

Подставим сюда значения (3.8) и (3.21) ковариантных производных

$$C^1_1\big(\widetilde{\Gamma}^j_{i\ell}\,dx^\ell\otimes\partial_k + \Gamma^\ell_{ik}\,dx^j\otimes\partial_\ell\big) = 0.$$

Используя $\mathcal{F}$-линейность оператора свертки C^1_1, переписываем это равенство в виде

$$\widetilde{\Gamma}^j_{i\ell}\,C^1_1(dx^\ell\otimes\partial_k) + \Gamma^\ell_{ik}\,C^1_1(dx^j\otimes\partial_\ell) = 0.$$

Поскольку $C^1_1(dx^\ell\otimes\partial_k) = \delta^\ell_k$, окончательно получаем

$$\widetilde{\Gamma}^j_{i\ell}\,\delta^\ell_k + \Gamma^\ell_{ik}\,\delta^j_\ell = \widetilde{\Gamma}^j_{ik} + \Gamma^j_{ik} = 0.$$

Таким образом, $\widetilde{\Gamma}^j_{ik} = -\Gamma^j_{ik}$ и формула (3.21) приобретает вид

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) = -\Gamma^j_{ik}\,dx^k. \tag{3.22}$$

Теперь для ковекторного поля $T = T_j\,dx^j$ находим с помощью (3.22)

$$\nabla_X T = \nabla_{X^k\partial_k}(T_j\,dx^j) = X^k\Big(\frac{\partial T_j}{\partial x^k}\,dx^j + T_j\nabla_{\partial_k}(dx^j)\Big) = X^k\Big(\frac{\partial T_j}{\partial x^k}\,dx^j - T_j\Gamma^j_{k\ell}\,dx^\ell\Big),$$

что может быть записано в виде

$$\nabla_X T = X^k(\nabla_k T_j)dx^j, \quad \nabla_k T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kj}T_p.$$

Это совпадает с (3.18)–(3.19) при $(r,s)=(0,1)$.

С помощью (3.8) и (3.22) нетрудно доказать справедливость (3.18)–(3.19) для любых (r,s). Чтобы не писать слишком длинных формул, мы продемонстрируем это доказательство в случае $(r,s)=(1,1)$; в общем случае доказательство то же, хотя формулы значительно более громоздкие.

Представим тензорное поле $T\in\mathcal{T}^1_1(U)$ в виде

$$T=T^i_j\,\partial_i\otimes dx^j.$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства можно рассматривать как тензорное произведение трех полей: $T^i_j\in\mathcal{T}^0_0(U)$, $\partial_i\in\mathcal{T}^1_0(U)$ и $dx^j\in\mathcal{T}^0_1(U)$. Ковариантные производные последних двух множителей находятся по формулам (3.8) и (3.22) соответственно, в то время как ковариантная производная функции T^i_j выражается формулой

$$\nabla_X(T^i_j)=X(T^i_j)=X^k\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_XT=\nabla_X(T^i_j\,\partial_i\otimes dx^j)&=\nabla_X(T^i_j)\,\partial_i\otimes dx^j+T^i_j\,(\nabla_X\partial_i)\otimes dx^j+T^i_j\,\partial_i\otimes\nabla_X(dx^j)\\&=X^k\Big(\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}\,\partial_i\otimes dx^j+T^i_j\,(\nabla_{\partial_k}\partial_i)\otimes dx^j+T^i_j\,\partial_i\otimes\nabla_{\partial_k}(dx^j)\Big)\\&=X^k\Big(\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}\,\partial_i\otimes dx^j+T^i_j\,\Gamma^\ell_{ki}\,\partial_\ell\otimes dx^j+T^i_j\,\partial_i\otimes(-\Gamma^j_{k\ell}\,dx^\ell)\Big).\end{aligned}$$

После очевидных изменений в обозначении индексов суммирования эта формула приобретает вид

$$\nabla_XT=X^k\Big(\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kp}\,T^p_j-\Gamma^p_{kj}\,T^i_p\Big)\partial_i\otimes dx^j$$

или

$$\nabla_XT=X^k\,\nabla_kT^i_j\,\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j,\quad\text{где}\quad\nabla_kT^i_j=\frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kp}\,T^p_j-\Gamma^p_{kj}\,T^i_p.$$

Это совпадает с (3.18)–(3.19) при $(r,s)=(1,1)$. На этом мы заканчиваем доказательство единственности в теореме 3.3.

Доказательство существования проводится по следующей схеме. Сначала определяем оператор (3.14) в области действия локальных координат формулами (3.18)–(3.19). Затем доказываем корректность этого определения, т.е., что координаты тензорного поля ∇_XT преобразуются по правилу (2.9) при замене координат; при этом надо использовать правило (3.13) преобразования символов Кристоффеля. Рекомендую Вам самостоятельно провести доказательство корректности для $T\in\mathcal{T}^1_1(M)$. Наконец, доказываем, что так определенный оператор (3.14) обладает всеми перечисленными в теореме свойствами. □

В заключение параграфа еще раз вернемся к определению 3.1 и заметим, что для фиксированного $Y\in\mathcal{V}(M)$ отображение

$$\nabla Y:\mathcal{V}(M)\to\mathcal{V}(M),\quad(\nabla Y)(X)=\nabla_XY$$

$\mathcal{F}(M)$-линейно. Согласно предложению 2.2, ∇Y является тензорным полем валентности $(1,1)$. Тем самым связность может рассматриваться как $\mathbb{R}$-линейный оператор (ковариантная производная)

$$\nabla:\mathcal{V}(M)=\mathcal{T}^1_0(M)\to\mathcal{T}^1_1(M),\quad Y\mapsto\nabla Y.\tag{3.23}$$

Как видно из (3.9), в координатах этот оператор выглядит следующим образом: для $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\nabla Y = \nabla_k Y^i \,\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k, \quad \text{где} \quad \nabla_k Y^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} Y^p. \tag{3.24}$$

Вполне аналогично, ковариантная производная на тензорных полях произвольной валентности может рассматриваться как $\mathbb{R}$-линейный оператор

$$\nabla : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_{s+1}(M), \quad T \mapsto \nabla T, \tag{3.25}$$

задаваемый в координатах равенством

$$\nabla T = \nabla_k T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^k, \tag{3.26}$$

в котором координаты $\nabla_k T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ выражаются через координаты поля T формулой (3.19). Отметим, что в случае $(r, s) = (0, 0)$ оператор (3.25) выглядит так:

$$\nabla : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{T}^0_1(M)$$

и ∇f совпадает с введенным в предыдущем параграфе дифференциалом df функции $f \in \mathcal{F}(M)$.

Упражнения

1. Пусть (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты на $\mathbb{R}^3$ и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ — координатные векторные поля. Зададим на $\mathbb{R}^3$ связность, положив $\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$. *Сферические координаты* (r, φ, ψ) на $\mathbb{R}^3$ определяются равенствами

$$x^1 = r\cos\varphi\cos\psi, \quad x^2 = r\cos\varphi\sin\psi, \quad x^3 = r\sin\varphi.$$

Найдите символы Кристоффеля заданной связности относительно сферических координат.

2. *Дивергенцией* векторного поля $X \in \mathcal{V}(M)$ (относительно связности ∇) называется функция

$$\operatorname{div} X = C^1_1(\nabla X) = \nabla_i X^i.$$

Найдите выражение для дивергенции векторного поля

$$X = X^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$$

в сферических координатах относительно связности, введенной в упражнении 1.

4. Тензоры кручения и кривизны

Пусть на многообразии M задана связность ∇. Определим отображение

$$T : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M) \tag{4.1}$$

формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{4.2}$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y, см. §5 главы 2. Покажем, что отображение (4.1) $\mathcal{F}$-линейно по обоим аргументам, т.е. является тензорным полем валентности $(1, 2)$ (см. предложение 2.2). Это поле $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$ называется *тензором кручения* связности ∇. Достаточно проверить $\mathcal{F}$-линейность по первому аргументу в силу равноправия X и Y в формуле (4.2). Напомним, что в §5 главы 2 доказано следующее свойство скобки Ли:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Используя это свойство и равенства (3.5), (3.7) из определения связности, выводим

$$\begin{aligned}T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\,\nabla_X Y - f\,\nabla_Y X - (Yf)X - f[X,Y] + (Yf)X \\ &= f\,\nabla_X Y - f\,\nabla_Y X - f[X,Y] = f\,T(X,Y).\end{aligned}$$

Найдем координаты тензора кручения, для чего положим $X = \partial_i$ и $Y = \partial_j$ в (4.2). Используя (3.8) и учитывая, что скобка Ли координатных полей равна нулю, получим

$$T(\partial_i, \partial_j) = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k,$$

т.е.

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}. \tag{4.3}$$

Говорят, что связность ∇ *симметрична*, если ее тензор кручения тождественно равен нулю. Происхождение этого названия очевидно: связность симметрична тогда и только тогда, когда символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Определим еще одно отображение

$$R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M) \tag{4.4}$$

формулой

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{4.5}$$

Оказывается, что это отображение $\mathcal{F}$-линейно по каждому из трех аргументов. Доказательство этого утверждения вполне аналогично приведенному выше доказательству линейности отображения (4.1), хотя и несколько длиннее поскольку не все аргументы равноправны; оставляю это доказательство в качестве упражнения. Согласно предложению 2.2, R является тензорным полем валентности $(1,3)$, которое называется *тензором кривизны* связности ∇. Координаты тензора кривизны находятся посредством вычислений, аналогичных проделанным выше при выводе формулы (4.3). Опуская эти вычисления, приведу результат:

$$R^\ell{}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^\ell_{jp}\Gamma^p_{ki} - \Gamma^\ell_{kp}\Gamma^p_{ji}. \tag{4.6}$$

Это — одна из важнейших формул тензорного анализа.

Положив $X = \partial_k$, $Y = \partial_\ell$ и $Z = Z^i\partial_i$ в (4.5), придем к *формуле коммутации* для вторых ковариантных производных:

$$(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) Z^i = R^i{}_{pk\ell}\, Z^p. \tag{4.7}$$

В отличие от вторых частных производных $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell}$, вторые ковариантные производные $\nabla_k \nabla_\ell$ не симметричны и тензор кривизны измеряет степень этой несимметричности. Аналогичная формула для тензорных полей произвольной валентности выглядит так:

$$(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{a=1}^{r} R^{i_a}{}_{pk\ell}\, T^{i_1 \dots i_{a-1} p\, i_{a+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \sum_{a=1}^{s} R^p{}_{j_a k\ell}\, T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{a-1} p\, j_{a+1} \dots j_s}. \tag{4.8}$$

Я не привожу доказательства этой формулы, ограничившись лишь его обсуждением. Найдем вторые ковариантные производные $\nabla_k \nabla_\ell\, T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$, пользуясь формулой (3.19). Получится довольно громоздкое выражение, являющееся линейным дифференциальным оператором второго порядка от координат поля T. Затем произведем альтернирование этого выражения по индексам k и ℓ, т.е. вычислим разность $(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$. Понятно, что все слагаемые второго порядка (т.е. содержащие вторые производные) сократятся при альтернировании в силу симметричности вторых частных производных. Несколько неожиданным обстоятельством оказывается то, что и все слагаемые первого порядка также сокращаются при этом альтернировании, т.е. в результате остается чисто алгебраическое выражение, не содержащее производных. Приведя подобные члены в этом выражении, можно убедиться, что все его коэффициенты выражаются через тензор кривизны посредством формулы (4.6). В итоге получается формула (4.8). Я настоятельно рекомендую проделать эти вычисления для $(r,s)=(1,1)$.

Упражнения

1. Докажите, что если связность симметрична, то ее тензор кривизны удовлетворят *первому тождеству Бианки*

$$R^\ell{}_{ijk}+R^\ell{}_{jki}+R^\ell{}_{kij}=0.$$

2. Считая связность симметричной, найдите ковариантную производную тензора кривизны и докажите *второе тождество Бианки*

$$\nabla_m R^\ell{}_{ijk}+\nabla_j R^\ell{}_{ikm}+\nabla_k R^\ell{}_{imj}=0.$$

5. Параллельный перенос

Напомним, что *(гладкой параметризованной) кривой* в многообразии M называется гладкое отображение $\mathbb{R}\supset[a,b]\xrightarrow{\gamma}M$. Первые два слова в этом определении заключены в скобки поскольку они обычно опускаются. В локальных координатах такая кривая задается гладкими функциями: $\gamma(t)=(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$. *(Гладким) векторным полем* вдоль кривой γ называется отображение X, ставящее в соответствие каждому $t\in[a,b]$ вектор $X(t)\in T_{\gamma(t)}M$, причем это отображение должно быть гладким в следующем смысле: в локальных координатах $X(t)=X^i(t)\partial_i$ с гладкими функциями $X^i(t)$. Примером векторного поля вдоль γ является *вектор скорости* $\dot\gamma(t)=\frac{d\gamma^i(t)}{dt}\partial_i$. Обозначим через $\gamma^*\mathcal{V}$ множество всех гладких векторных полей вдоль кривой γ.

Предложение 5.1. *Пусть на многообразии M задана связность ∇. Тогда для каждой кривой $\gamma:[a,b]\to M$ однозначно определен оператор*

$$\frac{D}{dt}:\gamma^*\mathcal{V}\to\gamma^*\mathcal{V},$$

обладающий следующими свойствами.

(1) $\frac{D(X+Y)}{dt}=\frac{DX}{dt}+\frac{DY}{dt}$.

(2) *Если $f(t)$ — гладкая функция на $[a,b]$, то*

$$\frac{D(fX)}{dt}=\frac{df}{dt}X+f\frac{DX}{dt}.$$

(3) *Если векторное поле $X(t)$ вдоль γ индуцировано векторным полем $Y\in\mathcal{V}(M)$, т.е. $X(t)=Y(\gamma(t))$, то $\frac{DX}{dt}=\nabla_{\dot\gamma}Y$. Векторное поле $\frac{DX}{dt}$ называется абсолютной производной поля $X(t)$ вдоль γ.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. На той части кривой, которая лежит в области определения локальной системы координат, мы можем написать $\gamma(t)=(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))$ и $X(t)=X^i(t)\partial_i$. Пользуясь свойствами (1)–(3), имеем

$$\frac{DX}{dt}=\frac{dX^j}{dt}\partial_j+X^j\frac{D\partial_j}{dt}=\frac{dX^j}{dt}\partial_j+X^j\nabla_{\dot\gamma}\partial_j=\frac{dX^k}{dt}\partial_k+X^j\dot\gamma^i\Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Таким образом,

$$\frac{DX}{dt} = \Big(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i X^j\Big)\partial_k. \tag{5.1}$$

Это доказывает единственность. Обратно, приняв (5.1) в качестве определения оператора $\frac{D}{dt}$, легко доказать его инвариантность (независимость от выбора координат) и свойства (1)–(3). □

Говорим, что векторное поле $X(t)$ вдоль кривой γ *параллельно вдоль* γ, если $\frac{DX}{dt} = 0$. Согласно (5.1), это означает, что

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j X^k = 0 \quad (1 \le i \le n). \tag{5.2}$$

Заметим, что (5.2) является системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Как известно, решение задачи Коши для такой системы существует и единственно. Таким образом получаем: *Для любого $t_0 \in [a,b]$ и любого вектора $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}$ существует единственное параллельное вдоль кривой $\gamma : [a,b] \to M$ векторное поле $X(t)$, удовлетворяющее $X(t_0) = X_0$.*

Пусть две точки $p, q \in M$ соединены кривой $\gamma : [a,b] \to M$, т.е. $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$. Определим отображение

$$\mathfrak{T}_\gamma : T_pM \to T_qM \tag{5.3}$$

следующим образом. Для $X_0 \in T_pM$ находим параллельное вдоль γ векторное поле $X(t)$, удовлетворяющее начальному условию $X(a) = X_0$, и полагаем $\mathfrak{T}_\gamma(X_0) = X(b)$. Это отображение называется *параллельным переносом векторов из точки p в точку q вдоль кривой γ.* Я утверждаю, что это отображение является изоморфизмом векторных пространств. Действительно, линейность отображения $\mathfrak{T}_\gamma$ следует из известного факта: решение линейной системы линейно зависит от начальных данных. Инъективность отображения $\mathfrak{T}_\gamma$ устанавливается следующим образом. Пусть $\mathfrak{T}_\gamma(X_0) = 0$ для некоторого $X_0 \in T_pM$. Тогда соответствующее решение $X(t)$ системы (5.2) удовлетворяет $X(b) = 0$ и, следовательно, $X(t) = 0$ для всех t в силу единственности решения задачи Коши. В частности, $X_0 = X(a) = 0$. Остается воспользоваться очевидным утверждением: линейное инъективное отображение между векторными пространствами одинаковой размерности есть изоморфизм.

В §4 главы 2 мы подчеркивали, что касательные пространства T_pM и T_qM являются непересекающимися множествами при $p \ne q$, никак не связанными друг с другом. На многообразии со связностью ситуация иная: каждая кривая γ, соединяющая точки p и q, связывает пространства T_pM и T_qM посредством параллельного переноса вдоль γ. Этим, отчасти, объясняется термин “связность”.

Рассмотрим две кривые $\gamma_i : [a_i, b_i] \to M$ $(i = 1, 2)$, соединяющие точки p и q, т.е. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) = p$ и $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2) = q$. Возникает естественный вопрос: как связаны между собой изоморфизмы $\mathfrak{T}_{\gamma_1} : T_pM \to T_qM$ и $\mathfrak{T}_{\gamma_2} : T_pM \to T_qM$? Этот вопрос весьма не прост. Приблизительный ответ на него звучит так: разница между этими изоморфизмами определяется тензором кривизны. Если говорить более точно, то справедливо, например, следующее утверждение: тензор кривизны связности ∇ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда параллельные переносы $\mathfrak{T}_{\gamma_1} : T_pM \to T_qM$ и $\mathfrak{T}_{\gamma_2} : T_pM \to T_qM$ совпадают для любых точек $p, q \in M$ и любых гомотопных друг другу кривых γ_1 и γ_2, соединяющих эти точки.

Упражнение

Как показывает следующая конструкция, связность ∇ однозначно восстанавливается, если известен параллельный перенос вдоль всех кривых, определяемый этой связностью. Действительно, для вектора $X \in T_pM$ выберем кривую $\gamma : [0, b) \to M$, выходящую из точки p в направлении X, т.е. $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = X$. Пусть $\mathfrak{T}^t_\gamma : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$ параллельный перенос из точки p в точку $\gamma(t)$ вдоль кривой $\gamma|_{[0.t]}$. Тогда для любого векторного поля $Y \in \mathcal{V}(M)$ справедливо равенство

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d\big((\mathfrak{T}^t_\gamma)^{-1}(Y_{\gamma(t)})\big)}{dt}\bigg|_{t=0}. \tag{5.4}$$

Отметим, что вектор $(\mathfrak{T}^t_\gamma)^{-1}(Y_{\gamma(t)})$ принадлежит пространству T_pM при любом t, поэтому определена производная, участвующая в правой части формулы (5.4). Докажите эту формулу.

Список литературы

[1] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М., “Наука”, 1979.
[2] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., “Наука”, 1967.
[3] Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М., “ИЛ”, 1948.