§ 3. Четырехмерное пространство. Четырехмерные векторы

3.1. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Пространственно-временной интервал (2.5) в силу инвариантности по отношению к преобразованиям Лоренца может быть интерпретирован как расстояние между двумя точками в некотором четырехмерном пространстве с координатами

$$x_0 = ict,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z. \tag{3.1}$$

Образуем пространственно-временной интервал, разделяющий событие, происшедшее в начале координат в момент $t = 0$, и событие, имеющее координаты x_0, x_1, x_2, x_3. По формуле (2.5) имеем:

$$S^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

А теперь будем считать S^2 квадратом длины радиус-вектора точки $M(x_0, x_1, x_2, x_3)$ в *четырехмерном пространстве* (сокращенное название — 4-пространство). Сам вектор обозначим x_α, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, а квадрат его модуля $x_\alpha x_\alpha$. Последний в новых обозначениях запишем так:

$$x_\alpha x_\alpha = S^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{3.2}$$

Заметим, что греческий индекс употребляется далее везде, где индекс принимает указанные четыре значения: $\alpha = 0, 1, 2, 3$. В остальных случаях в курсе используется латинский индекс. От известного нам выражения скалярного произведения двух обычных векторов в прямоугольных декартовых координатах формула (3.2) отличается знаком минус при первом слагаемом — произведении временных проекций четырехмерного радиус-вектора. Эта особенность отличает введенное 4-пространство от евклидового пространства, где все произведения входят со знаком «плюс». В геометрии такое пространство называется *вещественным псевдоевклидовым пространством индекса 1*, а в физике часто пространством Минковского.

Для того чтобы пользоваться обычным правилом нахождения скалярных произведений в этом пространстве, *временную проекцию (или координату) вектора снабжают мнимой единицей* (что и сделали в формуле (3.1)).

Основная цель введения 4-пространства состоит в применении хорошо разработанного математического аппарата тензорного исчисления в СТО. Именно этот аппарат оказался наиболее адекватным законам и соотношениям данного раздела физики.

Преобразования Лоренца, переводящие координаты точки 4-пространства из одной инерциальной системы в другую и сохраняющие неизменным S^2, т. е. квадрат модуля четырехмерного радиус-вектора точки, интерпретируются как *поворот осей прямоугольной системы координат*. Этот поворот в 4-пространстве определяется матрицей величин, играющих роль обычных направляющих косинусов при повороте осей в трехмерном пространстве:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

(здесь V — скорость движения штрихованной системы в нештрихованной). Нетрудно убедиться, что преобразования Лоренца выражаются теперь матричными формулами поворота осей $x' = \Lambda X$, где X — однорядная матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

или

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \tag{3.4}$$

причем «старой» системой является нештрихованная.

Можно рассматривать и обратное преобразование. При этом матрица обратного преобразования Λ^{-1} получится из Λ путем смены знака при V.

Как уже указывалось, пространство Минковского не является евклидовым пространством, поэтому оно не изображается достаточно полно и наглядно на рисунках и графиках в евклидовой плоскости листа бумаги. Однако с учетом неполного соответствия изображения к нему все же прибегают. Рассмотрим две оси Oct и Ox_1 на плоскости чертежа (рис. 3.1). Условимся, что $t_1 = 0$ для начал всех рассматриваемых процессов и первых из пар событий. В таком случае все времени-подобные интервалы лежат внутри вертикального угла, образованного биссектрисами CC около оси Oct Это область событий, которая может соотноситься с началом координат (первым событием) как следствие с причиной.

Рассмотрим некоторую прямую OM в указанной области Она состоит из точек, каждая из которых изображает событие (соответствует месту в пространстве x и моменту времени t). Прямую OM интерпретируют как *мировую линию*, т. е. как траекторию движения так называемой *мировой точки*. Мировая линия состоит из точек, последовательно изображающих события, каждое из которых в свою очередь является, например, пребыванием материальной точки в точках физического пространства x, y, z в момент времени t. Все мировые линии, соответствующие реальным движениям, имеют углы наклона к Ox_0, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_1}{dct}; \ \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{c} < 1, \tag{3.5}$$

т. е. лежат внутри указанного угла Биссектрисы же CC соответствуют мировым линиям световых сигналов. Учитывая (неизображенные) координаты y и z, говорят о световом конусе, разделяющем пространство событий на две области: область внутри конуса, которая соответствует области реальных движений, и область вне светового конуса, где скорость движений превышает c.

В заключение параграфа отметим, что геометрическая интерпретация обычно рассматривается как удобный математический прием. Однако присоединение временной координаты на «равных правах» к пространственным имеет глубокий физический смысл: оно возможно при наличии *связи* между пространством и временем. Мы воспринимаем окружающие нас физические явления как происходящие в трехмерном пространстве в различные моменты времени. С точки зрения четырехмерного пространства событий мир в любой момент времени t нами воспринимается как «сечение» с этого пространства трехмерной «плоскостью» $x_0 = \text{const}$. Рассматривая рисунок 3.1, замечаем, что «трехмерный покой» материальной точки соответствует движению мировой точки параллельно оси Oct. Возвращение движущейся материальной точки в некоторую точку физического пространства в 4-пространстве есть возвращение ее на прямую, параллельную оси Ox_0. Возвращение же назад, в некоторую точку 4-пространства, означающее возвращение к прошлому моменту времени, требует нарушения неравенства (3.5), т. е. движения со скоростью, превышающей c, что привело бы к нарушению причинно-следственной связи между явлениями.

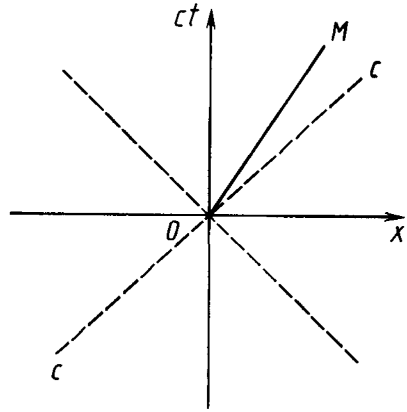

Рис. 3.1.

3.2. Четырехмерные векторы. Выше введен 4-вектор x_α, являющийся радиус-вектором точки в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Кроме 4-радиус-вектора, существуют и другие 4-векторы.

Они представляют собой совокупности четверок величин, преобразующихся при переходе от одной инерциальной системы координат к другой по формулам (3.4) с помощью матриц Λ. Выявление таких величин позволяет придать ряду физических законов *заведомо инвариантную форму,* одинаковую во всех инерциальных системах отсчета и поэтому соответствующую принципу относительности Эйнштейна.

Рассмотрим вектор 4-скорости, который определим формулой

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}. \tag{3.6}$$

Так как $d\tau$ — элемент собственного времени — инвариантная величина или скаляр преобразования Лоренца, а dx_α — 4-вектор, то v_α — 4-вектор.

Для проекций этого вектора имеем:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & v_1 &= \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ v_2 &= \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & v_3 &= \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Скалярный квадрат 4-скорости вычисляется по правилу скалярного произведения:

$$v_\alpha v_\alpha = -\frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -c^2. \qquad (3.8)$$

Он, как и должно быть, скаляр.

Существуют, кроме названных двух, и другие четырехмерные векторы. Они встретятся в релятивистской динамике (глава II) и далее в электродинамике.

Укажем, что пространственные составляющие 4-вектора являются обычными трехмерными векторами, поэтому удобна следующая сокращающая запись 4-векторов: $x_\alpha = (ict, \vec{r})$,

$$v_\alpha = \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Вычисления скалярных произведений при такой записи сокращаются, так как используются готовые формулы векторной алгебры для пространственных частей. Например,

$$v_\alpha v_\alpha = -\frac{c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

В заключение заметим, что объединение пространственных и временных координат позволяет математически наиболее кратко и исчерпывающе выразить свойства реального пространства и времени, а также свойства инерциальных систем отсчета, отражаемых преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца в таком случае соединены воедино с геометрической моделью четырехмерного пространства-времени, так как переход от системы к системе рассматривается как поворот осей координат.

Пример 3.1. **Преобразования 4-вектора скорости.** По формуле преобразований векторов (3.7) имеем для проекций 4-скорости: $v'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha\beta} v_\beta$, или подробно

$$v'_0 = \frac{v_0 - i\frac{V}{c}v_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{V}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v'_1 = \frac{i\frac{V}{c}v_0 + v_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{v'_x}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_x - V}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$v'_2 = v^2, \quad \frac{v'_y}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$v'_3 = v_3, \quad \frac{v'_z}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставляя в три последние формулы $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}$ из первой, окончательно получаем уже известные формулы преобразования скоростей (2.4):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}}.$$

Заметим, что инвариант 4-скорости можно находить в любой инерциальной системе отсчета, в том числе и в той, в которой в данный момент частица покоится: здесь $v_x = v_y = v_z = 0$ и

$$v_\alpha v_\alpha = v_0 v_0 = -c^2.$$

Упражнения к главе I

1. Вывести преобразования Лоренца, исходя из следующих линейных преобразований:

$$x' = \alpha(x - Vt),$$
$$t' = \beta t + \gamma x,$$

где α, β, γ — функции скорости v, и инвариантности уравнения сферической световой волны

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

2. Записать матрицу преобразований Лоренца для перехода от штрихованной системы к нештрихованной (обратные преобразования по отношению к (3.3)).

3. В верхних слоях атмосферы рождается мюон, движущийся со скоростью $v = 0{,}99$ с. До распада он успевает пролететь 5,00 км.

а) Каково время жизни мюона, наблюдаемое нами, и чему оно равняется в системе координат, в которой мюон покоится?

б) Чему равна толщина слоя атмосферы, пройденного мюоном, измеренная в его «собственной» системе координат?

4. Световой сигнал распространяется в некоторой системе вдоль оси Oy. Найти проекции и модуль его скорости в другой системе. Вычислить угол, на который отклоняется свет от оси $O'y'$ (угол аберрации).

5. Согласно принципу причинности событие, являющееся следствием, должно наступать после события, являющегося причиной. Показать, что инвариантность порядка событий обеспечивается преобразованиями Галилея и Лоренца.

6. Рассмотреть ограничения, накладываемые на причинно-следственные связи конечным характером скорости распространения взаимодействий.

7. Каким образом устанавливается одновременность двух событий?

8. Пользуясь преобразованиями Лоренца, найти условия, при которых понятие одновременности инвариантно.

9. Установить постоянство размеров тела в перпендикулярном направлении движению.

10. Вывести формулу преобразования объема тел при движении.

11. На плоскую поверхность под углом φ падает пучок параллельных световых лучей. Перпендикулярно поверхности перемещается тело. Какова скорость движения тени тела? Может ли она быть больше световой? Рассмотреть другие случаи, при которых скорость некоторой геометрической точки больше световой.

12. Два источника света движутся с релятивистскими скоростями v_1 и v_2 навстречу друг другу. Определить скорость сближения источников, скорость сближения их излучений, скорость одного источника относительно другого и скорость излучения, приходящего к одному источнику от другого.

(Скорость сближения — это скорость уменьшения расстояния между объектами в некоторой системе, не связанной с объектами.)